

CENTRALE I - PSI 2001

PARTIE I

I.A. vérification facile

I.B.1) $f = \Pi_{\Phi}^n(f) + (f - \Pi_{\Phi}^n(f))$ avec $f - \Pi_{\Phi}^n(f)$ orthogonal à $\Pi_{\Phi}^n(f)$. $d_{\Phi}^n(f)$ n'est autre que $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\|$. On applique le théorème de Pythagore.

I.B.2) $\|\Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f\|$ d'après la question précédente, avec égalité si f est élément de V_{Φ}^n . La borne supérieure demandée est donc égale à 1.

I.B.3) $\Pi_{\Phi}^n(f) = \sum_{j=0}^n (f | \Phi_j) \Phi_j$ lorsque la famille (Φ_j) est orthonormale, ce qui est le cas ici. Donc

$\|\Pi_{\Phi}^n(f)\|^2$ est égal à $\sum_{j=0}^n (f | \Phi_j)^2$. D'où $\sum_{j=0}^n (f | \Phi_j)^2 \leq \|f\|^2$, puis $\sum_{j=0}^{\infty} (f | \Phi_j)^2 \leq \|f\|^2$.

I.C.1) a) il suffit de prendre n supérieur à k puisqu'alors f_k est élément de V_{Φ}^n et donc $\Pi_{\Phi}^n(f_k) = f_k$.

b) toujours pour n supérieur à k , on aura $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f - f_k\| + \|\Pi_{\Phi}^n(f - f_k)\|$
 $\leq 2\|f - f_k\|$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe k tel que $\|f - f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$, et pour $n \geq k$, $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| < \varepsilon$

I.C.2) i) $\Rightarrow$ ii) résulte directement de ce qui précède

ii) $\Rightarrow$ i) : $(\Pi_{\Phi}^n(f))$ est une suite de V_{Φ} convergeant vers f

I.C.3) Puisque $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\|$ tend vers 0, il en est a fortiori de même pour $\|f\| - \|\Pi_{\Phi}^n(f)\|$. Donc :

$$\|f\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Pi_{\Phi}^n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (f | \Phi_j)^2$$

$$d_{\Phi}^n(f)^2 = \|f\|^2 - \|\Pi_{\Phi}^n(f)\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} (f | \Phi_j)^2$$

I.D.1) Prendre $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour x élément de $[-1, 0]$, puis l'étendre à $\mathbb{R}$ par périodicité. Vérifier que $\tilde{f}$ est continue en 1 aux points entiers.

I.D.2) Pour une fonction continue 2π -périodique, les sommes partielles de sa série de Fourier convergent en moyenne quadratique vers cette fonction. Si a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction h , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n a_j \cos(jt) \right|^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \left| \tilde{f}(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n a_j \cos(jx\pi) \right|^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left| \tilde{f}(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^n a_j \cos(jx\pi) \right|^2 dt = 0$$

donc la famille C est totale.

I.D.3) Il suffit d'enlever la constante 1 à la famille C. Aucune suite (u_n) engendrée par la nouvelle famille ne peut converger vers 1 puisque 1 est orthogonale à cette nouvelle famille :

$$1 = u_n + 1 - u_n$$

$$\Rightarrow (1 | 1) = (1 | 1 - u_n)$$

Si (u_n) convergeait vers 1, on aurait aussi $(1 | 1 - u_n)$ de limite nulle (Cauchy-Schwartz) et donc $(1 | 1) = 0$ ce qui n'est pas le cas.

PARTIE II

II.A.1) pas de pb pour montrer que $\text{Lip}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{R})$. Ce n'est pas une sous-algèbre (sauf si I est compact, cf question suivante). L'application $x \rightarrow x^2$ n'est pas lipschitzienne bien que carré de la fonction lipschitzienne $x \rightarrow x$.

II.A.2) $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)|$
 $\leq M (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|)$ en prenant M un majorant de $|f|$ et $|g|$ (qui existe car f et g sont continues, donc bornées sur un intervalle compact).

$$\leq 2MK |x - y| \text{ où } K \text{ est le plus grand des constantes de Lipschitz de } f \text{ et } g$$

$\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$

II.B) ERREUR D'ENONCE : Il faut lire : montrer que f (et non f') est lipschitzienne sur I. On peut supposer qu'un candidat doté de bon sens aura rectifié de lui-même, la question étant quasiment du cours.

Si f est lipschitzienne de rapport k , alors $|f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$

Réciproquement, si f' est bornée, l'inégalité des accroissements finis permet de conclure.

La constante de Lipschitz ne sera autre que $\sup_{x \in I} |f'(x)|$.

II.C) $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K |x - y|$ avec K majorant les k_n , et on passe à la limite.

II.D.1) Si $g(1) - g(0) = \delta$ (avec $|\delta| \leq 1$), prendre sur $[n, n+1]$ $g(x - n) + n\delta$. Il est facile de vérifier que $\bar{g}(x)$ est continue. Pour montrer qu'elle est lipschitzienne, supposons $x < y$. Si x et y sont dans le même intervalle $[n, n+1]$, c'est clair. Si $n \leq x \leq n+1 \leq m \leq y \leq m+1$, on a :

$$\begin{aligned} |\bar{g}(x) - \bar{g}(y)| &= |\bar{g}(x) - \bar{g}(n+1)| + |\bar{g}(n+1) - \bar{g}(m)| + |\bar{g}(m) - \bar{g}(y)| \\ &\leq n + 1 - x + (m - n - 1)|\delta| + y - m \leq n + 1 - x + m - n - 1 + y - m \leq y - x \end{aligned}$$

II.D.2) $g_n'(x) = n(\bar{g}(x + \frac{1}{n}) - \bar{g}(x))$ bornée par 1

$$\begin{aligned} |g_n(x) - \bar{g}(x)| &= \left| n \int_x^{x+1/n} \bar{g}(t) - \bar{g}(x) dt \right| \leq n \int_x^{x+1/n} |\bar{g}(t) - \bar{g}(x)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [x, x+1/n]} |\bar{g}(t) - \bar{g}(x)| \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{II.E.1)} (f | C_n) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos(n\pi t) dt = -\frac{\sqrt{2}}{n\pi} \int_0^1 f'(t) \sin(n\pi t) dt = -\frac{1}{n\pi} (f' | S_{n-1})$$

II.E.2) D'après I.B.3) la série de terme général $(f' | S_{n-1})^2$ converge et est majorée par $\|f'\|^2$. Donc la série de terme général $n^2(f | C_n)^2$ converge et est majorée par $\frac{1}{\pi^2} \|f'\|^2$.

II.F.1) Quitte à diviser f par $k(f)$, on peut supposer $k(f) = 1$. f est limite uniforme d'une suite (f_m) de fonction de classe C^1 à dérivée bornée par 1. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (f_m | C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}$$

A fortiori, pour tout p , $\sum_{n=1}^p n^2 (f_m | C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}$. Or la convergence étant uniforme, on a, pour tout n ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (f_m | C_n) = (f | C_n) \text{ car } |(f_m | C_n) - (f | C_n)| \leq \|f_m - f\| \|C_n\| \leq N_{\infty}(f_m - f) \|C_n\|$$

Il en résulte que, en faisant tendre m vers ∞ , on obtient $\sum_{n=1}^p n^2 (f | C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}$. Cette majoration étant

vraie pour tout p , et la série étant à termes positifs, on $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (f | C_n)^2 \leq \frac{1}{\pi^2}$.

$$\text{II.F.2)} d_C^{n-1}(f)^2 = \sum_{j=n}^{\infty} (f | C_j)^2 \text{ (cf I.C.3),}$$

$$\Rightarrow n^2 d_C^{n-1}(f)^2 = n^2 \sum_{j=n}^{\infty} (f | C_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^2 (f | C_j)^2 \leq \frac{k(f)^2}{\pi^2} \text{ d'où le résultat}$$

PARTIE III

$$\text{III.A)} d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 = \|\Psi_j\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j | \Phi_k)^2 \text{ d'après I.B.1 et I.B.3}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j | \Phi_k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^m d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)^2 = m + 1 - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j | \Phi_k)^2$$

et il suffit de montrer que $n \geq \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_j | \Phi_k)^2$ ou que $1 \geq \sum_{j=0}^m (\Psi_j | \Phi_k)^2$ or cette relation est vraie

puisque $\sum_{j=0}^m (\Psi_j | \Phi_k)^2 \leq \|\Phi_k\|^2 = 1$.

La deuxième inégalité s'obtient en prenant $m = 2n-1$.

III.B.1) AUTRE ERREUR D'ENONCE : On parle de Φ orthonormale puis ensuite de Ψ . Faudrait savoir !!

Il suffit de montrer que $k(\Psi_j) \geq \pi n d_{\Phi}^{n-1}(\Psi_j)$ et d'utiliser l'inégalité montrée précédemment. Or cette inégalité est vraie en prenant $\Phi = C$ (cf II.F.2)

III.B.2) Si la suite $(k(\Psi_j))$ était bornée par M , on aurait, pour tout n , $2nM \geq \pi^2 n^3$ ce qui n'est pas le cas.

III.B.3) Si la suite $k(\Psi_j)$ ne tendait pas vers l'infini, il existerait une sous-suite bornée. Mais cette sous-suite est également orthonormale, ce qui contredirait le III.B.2)

III.B.4) $k(C_n) = \sqrt{2} n \pi$ valeur maximale de la dérivée.

III.B.5) La suite étant croissante, on a :

$$\pi^2 n^3 \leq \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \leq 2n k(\Psi_{2n-1})^2$$

$$\Rightarrow k(\Psi_{2n-1}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} n \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n-1)$$

$$\Rightarrow k(\Psi_{2n}) \geq k(\Psi_{2n-1}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} 2n$$

$$\text{Dans tous les cas, } k(\Psi_n) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} n$$

PARTIE IV

IV.A) Les $(L_n(2x-1))$ sont orthogonaux. Il suffit de les normer. Or :

$$\begin{aligned} (Q_n | Q_n) &= \alpha_n^2 \int_0^1 L_n(2x-1)^2 dx = \frac{\alpha_n^2}{4^n n!^2} \int_0^1 P_n(2x-1)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha_n^2}{4^n n!^2} \int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt = \frac{\alpha_n^2}{2n+1} \text{ donc } \alpha_n = \sqrt{2n+1} \end{aligned}$$

IV.B.1) $d_Q^n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f | Q_k)^2$ d'après I.B.1 et I.B.3 est clairement décroissant.

IV.B.2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $N_{\infty}(f - P) < \varepsilon$ (la norme uniforme étant prise sur $[0,1]$). Pour n supérieur à $\deg(P)$, P appartient à V_Q^n . Comme $d_Q^n(f) \leq \|f - P\| \leq N_{\infty}(f - P) < \varepsilon$, on a bien $d_Q^n(f)$ de limite nulle en $+\infty$.

Cela signifie que $\Pi_Q^n(f)$ converge vers f . Q est donc totale d'après I.C.2).

IV.B.3) $\Phi_n = \pm Q_n$ par récurrence sur n . En effet, $\Phi_0 = \pm 1 = \pm Q_0$. Pour passer au rang $n+1$, on utilise le fait que Φ_{n+1} appartient à la droite orthogonale à l'hyperplan $(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . L'hypothèse de récurrence entraîne que Q_{n+1} est élément de cette droite, donc Φ_{n+1} et Q_{n+1} sont colinéaires.

IV.C) $U_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$. Appliquer Leibniz.

IV.D.1) On développe $\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{i\theta}\right)^n$ et $\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{-i\theta}\right)^n$, puis on fait le produit des deux développements. Les termes possédant une puissance de $e^{i\theta}$ donneront une intégrale nulle.

Les termes constants en θ seuls auront une contribution, et ces termes valent précisément $\frac{1}{2^n n!}$ fois

l'expression de P_n du IV.C. C'est donc bien L_n

IV.D.2) $L_n(x)$ est bornée par 1 puisque $|x + i\sqrt{1-x^2} \cos\theta| \leq 1$. Les extrema sont atteints en ± 1 .

IV.E.1) On dérive $n+1$ fois la relation $(x^2-1)U_n' = 2nxU_n$, on obtient :

$$(x^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)xU_n^{(n+1)} + (n+1)(n+2)U_n^{(n)} = 2nxU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$

ce qui donne :

$$(x^2-1)P_n'' + 2(n+1)xP_n' + (n+1)nP_n = 2nxP_n' + 2n(n+1)P_n$$

d'où le résultat.

$$\text{IV.E.2)} L_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2-1)U_n]$$

$$\Rightarrow L_{n+1}' = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} [(x^2-1)U_n]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} [(x^2-1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} U_n + 2(n+2)x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} U_n + (n+2)(n+1) \frac{d^n}{dx^n} U_n]$$

alors que $xL_n' = \frac{x}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} U_n$. Donc :

$$L_{n+1}' - xL_n' = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} [(x^2-1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} U_n + 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} U_n + (n+2)(n+1) \frac{d^n}{dx^n} U_n]$$

L'égalité de cette expression avec $(n+1)L_n$ équivaut à :

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} [(x^2-1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} U_n + 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} U_n + (n+2)(n+1) \frac{d^n}{dx^n} U_n] = \frac{(n+1)}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} U_n$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} U_n + 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} U_n + (n+2)(n+1) \frac{d^n}{dx^n} U_n = 2(n+1)^2 \frac{d^n}{dx^n} U_n$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)P_n'' + 2xP_n' - n(n+1)P_n = 0 \text{ ce qui est bien vérifié.}$$

IV.F) On sait que L_n est maximal en 1 et vaut 1. Par récurrence, L_n' aussi avec la relation :

$$L_{n+1}'(1) = L_n'(1) + n + 1 \text{ et } L_0' = 0$$

$$\text{d'où } L_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$k(Q_n)$ est égal au maximum de la valeur absolue de la dérivée de Q_n soit :

$$Q_n'(1) = 2\alpha_n L_n'(1) = \sqrt{2n+1} n(n+1)$$