

## EXERCICE I

**Q1.** La matrice produit  $C$  de taille  $n \times n$  où  $n$  est le nombre de lignes et de colonnes de  $A$  et de  $B$

a comme coefficient  $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}b_{kj}$ , d'où le programme :

```
def produit(A, B):
    n = len(A)
    C = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            s = 0
            for k in range(n):
                s += A[i][k] * B[k][j]
            C[i][j] = s
    return C
```

**Q2.** Si la matrice est symétrique, alors le graphe n'est pas orientée, on compare donc les termes  $a_{ij}$  et  $a_{ji}$

pour  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  (on peut diviser le nombre de calculs par 2 et ne faire varier  $j$  que dans  $\llbracket 0, i-1 \rrbracket$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ )

```
def oriente(A):
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return True
    return False
```

**Q3.** Le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $A^p$  (noté  $a_{ij}^p$ ) donne le nombre de chemins de longueur  $p$  qui joignent le sommet  $i$  au sommet  $j$  en  $p$  étapes.

On cherche donc la première valeur de  $p$  telle que  $a_{ij}^p$  soit non nul :

```
def distance(A, i, j):
    p = 1
    B = A
    while B[i][j] == 0:
        p += 1
        B = produit(A, B)
    return p
```

**Q4.** `SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = "Toulouse"`

**Q5.** `SELECT CLIENTS.email FROM CLIENTS  
JOIN PARTENAIRES ON PARTENAIRES.id client = CLIENTS.id  
WHERE PARTENAIRES.partenaire = "SCEI"`

## EXERCICE II

On définit la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}^2$

**Q6.** Établir que  $e^{-x} = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$

La fonction  $d : x \mapsto e^{-x} - x$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée  $d' : x \mapsto -e^{-x} - 1$  est négative sur  $\mathbb{R}$ .

$d$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , comme  $d(0) = 1$  et  $d(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$  car  $e > 1$ , on en conclut par le théorème des valeurs intermédiaires que  $d(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que  $e^{-x} = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , cette solution est un élément de  $]0, 1[$ , on la note  $\alpha$ .

**Q7.** Démontrer que  $f$  admet un unique point critique  $(x_0, y_0)$  sur  $\mathbb{R}^2$

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  et on cherche donc à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$f$  admet donc un unique point critique  $A(\alpha, \frac{\alpha}{2})$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Q8.** La matrice Hessienne de  $f$  en  $A$  est  $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-\alpha} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ , son déterminant est strictement positif ( $4 + 4e^{-\alpha}$ ) et sa trace est positive, les deux valeurs propres de la matrice sont strictement positives, c'est donc une matrice symétrique de  $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$

et donc  $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(h, k)H_f(A)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} > 0$ ,

A l'aide du développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en  $A$ , on peut dire que, pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha + h, \frac{\alpha}{2} + k) = f(\alpha, \frac{\alpha}{2}) + 0 + \frac{1}{2}(h, k)H_f(A)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|^2)$$

C'est à dire que sur un voisinage de  $A$ ,  $f(\alpha + h, 2\alpha + k) - f(A) > 0$ , ce qui signifie que l'on a en  $A$  un minimum local.

## PROBLÈME

### Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

**Q9.** La fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est continue et positive sur  $]0, 1[$  ainsi que sur  $[1, +\infty[$

En 0, on a  $\varphi(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$  et  $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$  est intégrable car  $1 - \alpha < 1$ , donc par théorème des équivalents, la fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

En  $+\infty$ , on a  $\varphi(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$  et  $\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx$  est intégrable car  $2 - \alpha > 1$ , donc par théorème des équivalents, la fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

**Q10.** On a successivement :

$$I(1 - \alpha) = \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx$$

on effectue le changement de variable  $x = \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} I(1 - \alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1 + \frac{1}{u}} \left( -\frac{du}{u^2} \right) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du \\ &= J(\alpha) \end{aligned}$$

**Q11.** Pour  $x$  fixé dans  $]0, 1[$ ,  $f_n(x)$  est le terme général d'une série géométrique et  $|f_n(x)| < 1$ , la série est donc convergente :

$$\text{On a donc } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

supposons que la série converge uniformément sur  $]0, 1[$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = (-1)^n$

Le théorème de la double limite entraînerait que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$  converge ce qui n'est pas le cas.

Donc la série ne converge pas uniformément sur  $]0, 1[$ .

**Q12.** Comme  $S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$ .

On note  $\varphi_n : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$ .

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto \varphi_n(x)$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  et  $\varphi$  est continue par morceau sur  $]0, 1[$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $|\varphi_n(x)| \leq \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$  et la fonction  $x \mapsto 2 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = I(\alpha)$$

$$\text{Comme } \int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$$

On en déduit en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  que  $I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

**Q13.** Avec la relation de Chasles, on a immédiatement  $I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ .

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1 - \alpha) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha + 1 + k} \\
 &\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k + 1 \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha + p} \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{-\alpha + n} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2\alpha)}{-\alpha^2 + n^2} \\
 I(\alpha) + J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}
 \end{aligned}$$

**Q14.** En posant  $x = 0$  dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

## Partie II - Lien avec la fonction Gamma

**Q15.** Soit  $x > 0$ , on note  $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

$\psi_x$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$

$\psi_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$  avec  $1 - x < 1$  donc par équivalent avec une intégrale de Riemann,  $\int_0^1 \psi_x(t) dt$  converge.

$t^2\psi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\psi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente,  $\int_1^{+\infty} \psi_x(t) dt$  converge.

Ainsi  $\Gamma$  est bien définie pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

**Q16.** • Pour  $x = 0$ , on retrouve  $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$  d'après la question 14.

• Pour  $x > 0$ ,  $\mu : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$

$\mu(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$  et on prouve comme à la question 9 que  $\int_0^1 \mu(t) dt$  converge.

$t^2\mu(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\mu(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et donc par comparaison avec une intégrale de

Riemann convergente,  $\int_1^{+\infty} \mu(t) dt$  converge.

Ainsi  $f_\alpha$  est bien définie sur  $[0, +\infty[$ .

Démontrons maintenant que  $f_\alpha$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

On note  $\lambda$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  par  $\lambda : (x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$

- Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto \lambda(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$
- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $t \mapsto \lambda(x, t)$  est continue par morceau (car continue) sur  $]0, +\infty[$
- Pour tout  $(x, t) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ ,  $|\lambda(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$  et  $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  d'après la question 9.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $f_\alpha$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Q17.** Soit  $a$  et  $b$  réels tels que  $0 < a < b$ , on conserve la notation de  $\lambda$  de la question précédente que l'on définit cette fois sur  $[a, b] \times ]0, +\infty[$

- $\forall x \in [a, b]$ ,  $t \mapsto \lambda(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  d'après la question 16 (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).
- $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto \lambda(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$
- $\forall x \in [a, b]$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt}$  est continue sur  $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$  et  $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et c'est un  $o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , donc elle est intégrable sur  $[0, +\infty[$

On peut donc conclure par théorème de dérivation que  $f_\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

Ceci étant pour tout  $a$  et  $b$  de  $]0, +\infty[$ , on en conclut que  $f_\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ ,

$$\text{et } f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt$$

**Q18.** On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit  $x > 0$ , on note  $\lambda_x : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$  définie sur  $]0, +\infty[$

- $\forall x > 0$ ,  $t \mapsto \lambda_x(t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$
- $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\lambda_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0$  et  $t \mapsto 0$  est continue par morceau sur  $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in (]0, +\infty[)^2$ ,  $|\lambda_x(t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$  et  $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  (vu question précédente)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_x(t) dt = 0$$

**Q19.** La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ ,

$\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$  et  $\alpha < 1$  donc par équivalent  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$  converge.

et  $t^2 \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ , donc  $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$  converge.

On montre ainsi que  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$

On a donc, pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = 0$$

### Partie III - Vers la formule des compléments

**Q20.** Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt$$

on effectue le changement de variable  $u = xt$

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{1}{x} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

**Q21.** Calcul préliminaire, on note  $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

On a  $g$  qui est définie d'après la question 19 et de classe  $\mathcal{C}^1$  d'après le théorème fondamental de l'analyse et  $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$

$g_\alpha$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  comme produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \Gamma(\alpha) e^x \left( -\frac{e^{-x}}{x^\alpha} \right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi  $g_\alpha$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ .

Considérons l'équation différentielle :  $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$  pour  $x > 0$

L'équation sans second membre associée est  $y' - y = 0$  dont les solutions sont  $y(x) = k e^x$  où  $k$  est un réel.

Comme  $g_\alpha$  est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont  $y(x) = k e^x + g_\alpha(x)$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

$f_\alpha$  étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel  $k$  tel que pour tout  $x > 0$ ,  $f_\alpha(x) = k e^x + g_\alpha(x)$ .

Il reste à déterminer la valeur de  $k$ .

On a de l'équation précédente l'égalité  $e^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  que  $k = 0$ .

On conclut ainsi que  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ .

**Q22.** En posant  $x = 0$  dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour  $x > 0$ .

On sait d'après la question 16 que  $f_\alpha$  est continue sur  $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) \quad (\text{par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) \quad (\text{car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0) \\ &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \end{aligned}$$

D'autres part, comme  $f_\alpha(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt$ , on obtient l'égalité demandée.

**Q23.** On sait d'après la question 14 que  $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

**Q24.** On pose  $u = t^2$  dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on a  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  (car  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$  comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**FIN**