

CONCOURS MINES PONTS Met P' Epreuve pratique.

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
 ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
 DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
 DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
 DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
 ECOLE POLYTECHNIQUE
 (OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1992

EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M ET P'

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 2 pages.

Objectif de l'épreuve

On se propose de relier l'étude d'une famille d'intégrales impropres convergentes (partie II) à celle préalablement faite (dans la partie I) d'une série de fonctions.

PARTIE I

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction u_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = \frac{1}{(nx + 1)^2}.$$

On désignera par u'_n et u''_n respectivement, les dérivées première et seconde de u_n .

α) On désigne par a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que les trois séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u''_n$ sont uniformément convergentes sur $[a, b]$.

Le sont-elles encore sur $[a, +\infty[$? et sur $]0, a]$?

β) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(x)$.

On rappelle que la somme de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est $\frac{\pi^2}{6}$.

Donner les valeurs exactes de $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(1)$, $F(2)$.

γ) Pour tout entier N et tout réel x strictement positifs on note :

$$S_N(x) = \sum_{p=0}^N u_p(x).$$

Montrer que l'on a : $\frac{1}{x(Nx + 1 + x)} < F(x) - S_N(x) < \frac{1}{x(Nx + 1)}$.

δ) Soit T_N la fonction définie sur $]0, \infty[$ par :

$$T_N(x) = S_N(x) + \frac{1}{2x(Nx + 1)} + \frac{1}{2x(Nx + x + 1)}.$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

Démontrer l'inégalité pour tout x strictement positif : $|F(x) - T_N(x)| \leq \frac{1}{2N^2 x^2}$.

Ecrire un algorithme de calcul de $T_N(x)$ et déterminer, en justifiant les calculs avec une précision égale à 10^{-5} , les valeurs de $F\left(\frac{3}{2}\right)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$.

- α) Montrer que F' et F'' existent sur $]0, +\infty[$. Quel est leur signe sur cet intervalle ?
- β) Déterminer les limites de $F(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.
- γ) Tracer la courbe représentative de F .

PARTIE II

α est un paramètre réel strictement positif.

1°) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^\alpha} dt$ est convergente quel que soit $\alpha > 0$.

2°) Montrer qu'il existe une fonction g_α réelle, définie et continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout t appartenant à $]0,1[$ et pour tout entier naturel N , l'on ait :

$$\frac{\ln t}{1-t^\alpha} = \sum_{p=0}^N t^{p\alpha} \cdot \ln t + t^{N\alpha} \cdot g_\alpha(t).$$

On explicitera g_α en donnant en particulier ses valeurs aux points $t = 0$ et $t = 1$.

3°) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^\alpha} dt = - \sum_{p=0}^N u_p(\alpha) + \int_0^1 t^{N\alpha} \cdot g_\alpha(t) dt \quad \text{puis que} \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^\alpha} dt = -F(\alpha)$$

où F est la fonction définie dans la partie I.

4°) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^\alpha} dt$ est convergente.

5°) a) On prend toujours $\alpha > 1$; montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^\alpha} dt = -F(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)^2} \cdot F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.

b) En déduire avec une précision égale à $2 \cdot 10^{-5}$ les valeurs des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^4} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^5} dt.$$