

MINES-PONTS

MATHÉMATIQUES PSI 2003 (2-ÈME ÉPREUVE) CORRIGÉ

Première partie

- \mathbf{M} est un espace vectoriel de dimension 9. Donc \mathbf{C} est de dimension 18.
- \mathbf{C} est par définition l'espace vectoriel produit cartésien de l'espace vectoriel \mathbf{M} par lui-même. De plus la loi $*$ est associative car

$$\begin{aligned} ((P, Q) * (R, S)) * (T, U) &= (P.R, P.S + Q.R) * (T, U) = (P.R.T, P.R.U + P.S.T + Q.R.T) \\ &= (P, Q) * (R.T, R.U + S.T) = (P, Q) * ((R, S) * (T, U)) \end{aligned}$$

- possède un élément neutre qui est le couple $(I, 0)$
- est distributive à droite par rapport à l'addition car

$$((P, Q) + (R, S)) * (T, U) = (P + R, Q + S) * (T, U) = ((P + R).T, (P + R).U + (Q + S).T) = (P, Q) * (T, U) + (R, S) * (T, U)$$

- est distributive à gauche par rapport à l'addition par un calcul similaire
- est compatible à la multiplication par un scalaire c'est à dire

$$\lambda((P, Q) * (R, S)) = (\lambda(P, Q)) * (R, S) = (P, Q) * (\lambda(R, S)).$$

Donc \mathbf{C} est bien une \mathbb{R} -algèbre associative unitaire.

- On sait déjà que la loi $*$ est associative et que son élément neutre est dans \mathbf{G} . De plus le produit $(T, U) = (P, Q) * (R, S)$ de deux éléments de \mathbf{G} vérifie $T = P.R \in SO(\mathbb{R}^3)$ et, sachant que ${}^t P.P = I$,

$${}^t T.U + {}^t U.T = {}^t R.{}^t P.(P.S + Q.R) + ({}^t S.{}^t P + {}^t R.{}^t Q).P.R = {}^t R.({}^t P.Q + {}^t Q.R).R + {}^t R.S + {}^t S.R = 0.$$

La loi $*$ est donc interne. Enfin, le symétrique à gauche du couple (P, Q) est le couple $({}^t P, {}^t Q)$ d'après la relation définissant \mathbf{G} et il suffit de multiplier cette relation à gauche par P et à droite par ${}^t Q$ pour montrer qu'il est aussi symétrique à droite. Donc \mathbf{G} est un groupe.

- \mathbf{H} n'est pas vide puisqu'il contient le couple $(I, 0)$, est stable par produit et par passage au symétrique. C'est donc un sous-groupe de \mathbf{G} ; l'application $(P, 0) \mapsto P$ est évidemment un isomorphisme de groupe de \mathbf{H} sur $SO(\mathbb{R}^3)$.
- \mathbf{A} est formé des couples (I, Q) tels que Q soit une matrice antisymétrique; il contient le couple $(I, 0)$, est stable par produit et par passage au symétrique. C'est donc aussi un sous-groupe de \mathbf{G} ; il est commutatif et isomorphe au groupe additif des matrices antisymétriques.
- e étant l'élément neutre de \mathbf{G} ,

$${}^t(P, Q) * (P, Q) = e \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t P.P = I \\ {}^t P.Q + {}^t Q.P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \in O(\mathbb{R}^3) \\ {}^t P.Q + {}^t Q.P = 0 \end{cases}.$$

En ajoutant la condition $\det(P) = 1$, on obtient l'équivalence demandée.

Deuxième partie

- Soient $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. Alors

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = (a_2x_3 - a_3x_2)\vec{i} + (a_3x_1 - a_1x_3)\vec{j} + (a_1x_2 - a_2x_1)\vec{k}.$$

La matrice $P_{\vec{a}}$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Avec des notations analogues, la linéarité de r donne

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)r(\vec{i}) + (x_3y_1 - x_1y_3)r(\vec{j}) + (x_1y_2 - x_2y_1)r(\vec{k}).$$

Or la base $(r(\vec{i}), r(\vec{j}), r(\vec{k}))$ étant orthonormée directe, le produit vectoriel de $r(\vec{x}) = x_1r(\vec{i}) + x_2r(\vec{j}) + x_3r(\vec{k})$ et de $r(\vec{y}) = y_1r(\vec{i}) + y_2r(\vec{j}) + y_3r(\vec{k})$ peut être calculé dans cette base ce qui redonne le résultat précédent. Donc $r(\vec{x} \wedge \vec{y}) = r(\vec{x}) \wedge r(\vec{y})$

- $r \circ p_{\vec{a}}(\vec{x}) = r(\vec{a} \wedge \vec{x}) = r(\vec{a}) \wedge r(\vec{x}) = p_{\vec{b}} \circ r(\vec{x})$ avec $\vec{b} = r(\vec{a})$.

10. $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$ puisque \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires. Donc $\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$ est indépendant de M sur D . De plus \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

11. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est une solution particulière de l'équation. En effet, puisque $\|\vec{u}\| = 1$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} = \vec{v}$. Toute autre solution s'obtiendra en ajoutant à celle-ci une solution de l'équation "homogène" $\vec{x} \wedge \vec{u} = 0$, c'est à dire un multiple de \vec{u} . La solution générale est donc $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \lambda \vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

12. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = \vec{v}$ est donc la droite affine dirigée par \vec{u} et passant par le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

13. Pour $\vec{u} = \vec{i}$ et $\vec{v} = b\vec{j} + c\vec{k}$, $\overrightarrow{OA} = -c\vec{j} + b\vec{k}$.

14. Deux couples (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{u}', \vec{v}') de \mathbf{P} définissent la même droite D si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} = \varepsilon \vec{u}' \\ A' \in D \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} \vec{u} = \varepsilon \vec{u}' \\ (\vec{u}' \wedge \vec{v}') \wedge \vec{u} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \varepsilon \vec{u}' \\ (\vec{u} \cdot \vec{u}') \vec{v}' - (\vec{u} \cdot \vec{v}') \vec{u}' = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \varepsilon \vec{u}' \\ \vec{v} = \varepsilon \vec{v}' \end{cases}.$$

où ε désigne ± 1 .

15. La droite $D' = r(D)$ est dirigée par le vecteur unitaire $r(\vec{u})$. Choisissons $\vec{u}' = r(\vec{u})$ et prenons $\alpha = r$. Soit A un point quelconque de D . Alors $\vec{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$. De plus, si $A' = d(A)$, le vecteur \vec{v}' est donné par $\vec{v}' = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{u}' = \overrightarrow{OA'} \wedge r(\vec{u})$. Or $\overrightarrow{OA'} = \vec{a} + r(\overrightarrow{OA})$. Donc $\vec{v}' = \vec{a} \wedge r(\vec{u}) + r(\overrightarrow{OA}) \wedge r(\vec{u}) = p_{\vec{a}} \circ r(\vec{u}) + r(\vec{v})$. Donc $\beta = p_{\vec{a}} \circ r$.

16. Puisque la construction précédente peut être faite à partir de n'importe quelle droite D , on doit avoir $\alpha(\vec{u}) = r(\vec{u})$ pour tout \vec{u} ; α est donc déterminé de manière unique. Dès lors, $\beta(\vec{u}) = p_{\vec{a}} \circ r(\vec{u})$ pour tout \vec{u} prouve l'unicité de β . A est la matrice d'une rotation, donc dans $SO(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, $B = P_{\vec{a}} \cdot A$ d'où ${}^t A \cdot B + {}^t B \cdot A = {}^t A \cdot P_{\vec{a}} \cdot A + {}^t A \cdot {}^t P_{\vec{a}} \cdot A = 0$ car $P_{\vec{a}}$ est antisymétrique. Donc $(A, B) \in \mathbf{G}$.

17. La connaissance de A donc de α détermine entièrement la rotation r . Celle-ci étant inversible, la connaissance de $\beta = p_{\vec{a}} \circ r$ (ou de sa matrice) détermine entièrement $p_{\vec{a}}$ donc \vec{a} (cf. 7.). Par suite, le déplacement d est entièrement déterminé par le couple (A, B) et l'application J est injective.

18. α est la rotation d'axe Oz et d'angle ϑ de matrice $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ est le vecteur $\vec{j} + \vec{k}$ et on en déduit la matrice B de β :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta & 1 \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{u}' = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}, \quad \vec{v} = y_0 \vec{j} \wedge \vec{i} = -y_0 \vec{k},$$

$$\vec{v}' = r(y_0 \vec{j} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge \vec{u}' = (y_0(-\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}) + \vec{j} + \vec{k}) \wedge (\cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}) = -\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j} - (y_0 + \cos \vartheta) \vec{k}.$$

On vérifie que $\alpha(\vec{v}) = -y_0 \vec{k}$ d'où $\vec{v}' = \alpha(\vec{v}) - \sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j} - \cos \vartheta \vec{k} = \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{u})$.

19. Soit maintenant un couple $(A, B) \in \mathbf{G}$. On peut évidemment associer à la matrice $A \in SO(\mathbb{R}^3)$ une rotation r de matrice A dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La matrice $B \cdot A^{-1} = B \cdot {}^t A$ est antisymétrique puisque ${}^t(B \cdot {}^t A) = A \cdot {}^t B = A \cdot {}^t B \cdot A \cdot {}^t A = -A \cdot {}^t A \cdot B \cdot {}^t A = -B \cdot {}^t A$ (on a utilisé d'abord $A^{-1} = {}^t A$ puis la définition de \mathbf{G}).

Elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire égale à $P_{\vec{a}}$ avec $\vec{a} = -\gamma \vec{i} + \beta \vec{j} - \alpha \vec{k}$. Donc l'application J est surjective.

20. Pour que la droite associée au couple (\vec{u}, \vec{v}) soit invariante, il faut et il suffit que $\begin{cases} \alpha(\vec{u}) = \varepsilon \vec{u} \\ \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{u}) = \varepsilon \vec{v} \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1).$

▷ 1^{er} cas. Si d est une translation, aucune droite n'est invariante.

▷ 2^{ème} cas. Si A n'est ni la matrice I ni la matrice d'une rotation d'angle π (retournement), on doit choisir $\varepsilon = 1$. Alors D est parallèle à l'axe de rotation et $\beta(\vec{u}) = p_{\vec{a}}(\vec{u}) = \vec{a} \wedge \vec{u}$ d'où $(\alpha - id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ (*).

▷ 3^{ème} cas. Si au contraire A est pas la matrice d'un retournement, il faut ajouter aux solutions précédentes celles correspondant à $\varepsilon = -1$. Le vecteur \vec{u} est alors orthogonal à l'axe de rotation, $\beta(\vec{u}) = -p_{\vec{a}}(\vec{u}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ et $(\alpha + id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ (**).

Dans les deuxièmes cas, $\text{rg}(\alpha - id) = 2$ et $\text{Im}(\alpha - id)$ est le plan orthogonal à \vec{u} . Il y a donc toujours une solution \vec{v} de l'équation $(\alpha - id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ (*) et cette solution est définie à addition près d'un vecteur porté par l'axe de rotation. Une seule de ces solutions est orthogonal à \vec{u} .

Dans le troisième cas, $\text{rg}(\alpha + id) = 1$ et $\text{Im}(\alpha + id)$ est l'axe de la rotation. L'équation $(\alpha + id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ (**) ne peut donc avoir de solution que si \vec{a} est dans le plan orthogonal à l'axe de rotation et la solution est alors définie à l'addition près d'un vecteur de ce plan. Parmi ces solutions, un sous-espace affine de dimension 1 est formé des vecteurs orthogonaux à \vec{u} .

21. Si $\vartheta \neq 0 \pmod{\pi}$, on doit prendre $\vec{u} = \vec{k}$ (au signe près) et l'unique vecteur \vec{v} cherché, de la forme $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ doit vérifier

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \vartheta - 1 & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - 2 \cos \vartheta} \begin{pmatrix} \cos \vartheta - 1 & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sin \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)}\vec{j}. \end{aligned}$$

Si $\vartheta = \pi \pmod{2\pi}$, il n'y a pas d'autre droite invariante car $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ n'est pas orthogonal à l'axe de rotation.

Si $\vartheta = 0 \pmod{2\pi}$, d est une translation et il n'existe aucune droite invariante.