

BANQUE D'ÉPREUVES E3A 2021

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

(corrigé)

Exercice 1

1. (1.1) La fonction $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$ est nulle, donc en isolant le terme de la somme correspondant à $k = -1$ on a :

$$\forall x \in J, \quad a_{-1} \ln(1+x) = - \sum_{k=0}^p a_k f_k(x) = - \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(1+x)^k}.$$

Le membre de droite tend vers $-a_0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (attention au fait que $f_0 = 1$ ne tend pas vers 0 en l'infini, au contraire des autres fonctions f_k). En particulier, c'est une limite finie. Pour que cette égalité soit vraie, il faut donc que $a_{-1} \ln(1+x)$ ait une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui n'est possible que si $a_{-1} = 0$: d'où le résultat.

- (1.2) Pour montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ est libre, nous devons démontrer que la seule relation de dépendance linéaire entre ces fonctions est la relation de dépendance triviale. Or, d'après la question précédente, s'il existe $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ tel que $\sum_{k=-1}^p a_k f_k = 0$, alors $a_{-1} = 0$, ce qui nous donne une relation de la forme suivante (après multiplication par $(1+x)^p$) :

$$\forall x \in J, \quad a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \dots + a_{p-1}(1+x) + a_p = 0.$$

La famille $\left((1+X)^k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ est une famille de $\mathbb{R}_p[X]$ échelonnée en degré, donc elle est libre. On en déduit que la relation ci-dessus implique : $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = 0$. Ainsi $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$, ce qui démontre ce qu'on voulait : la famille \mathcal{B} est libre. (Certes, on a utilisé la liberté d'une famille de polynômes, alors que la relation de dépendance ci-dessus est avec une famille d'applications polynomiales, mais passer de l'une à l'autre ne souffre d'aucune difficulté.)

Remarque. Une autre stratégie, pour montrer l'indépendance linéaire, est de constater que si i est l'indice du plus grand scalaire a_i non nul de la relation de dépendance ci-dessus, alors on a $\sum_{k=0}^p a_k f_k(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{a_i}{(1+x)^i}$, et on en déduit que la fonction $\sum_{k=0}^p a_k f_k$ admet une limite infinie en -1 (ou égale à $a_0 \neq 0$ si $i = 0$) : impossible s'il s'agit de la fonction nulle. Par l'absurde, on en déduit que tous les scalaires a_i sont nuls.

- (1.3) La famille \mathcal{B} engendre E par définition de E , et elle est libre d'après la question précédente. C'est donc une base de E , et on en déduit : $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B}) = p + 2$.
2. (2.1) Soient $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ et $x \in J$. Par définition de u , on a : $u(f_k)(x) = (1+x)f'_k(x)$. Si $k = -1$, alors $f'_{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$, donc : $u(f_{-1})(x) = 1$, tandis que si $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ alors on a : $f'_k(x) = -k(1+x)^{-k-1}$, puis : $u(f_k)(x) = -k(1+x)^{-k} = -kf_k$. En conclusion :

$$u(f_{-1}) = 1 (= f_0), \quad \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad u(f_k) = -kf_k.$$

- (2.2) La linéarité de u est évidente par linéarité de la dérivation. De plus, la question précédente montre que pour tout $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$, on a $u(f_k) \in E$ (en effet les f_i engendrent E), et comme la stabilité d'un espace vectoriel par une application linéaire équivaut à la stabilité vérifiée sur une base, on en déduit que $u(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi u est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans E , donc c'est un endomorphisme de E .

(2.3) Déterminons le noyau de u . Soit $f \in E$ tel qu'on ait : $u(f) = 0_E$. Cela signifie : $\forall x \in J$, $(1+x)f'(x) = 0$. Comme $1+x \neq 0$ pour $x \in J$, on en déduit : $\forall x \in J$, $f'(x) = 0$. Ainsi f est de dérivée nulle sur un intervalle, donc f est constante ; réciproquement, toute fonction constante vérifie bien $u(f) = 0_E$, donc $\ker(u)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur J . Notons que $f_0 = 1$, et donc que l'ensemble des fonctions constantes est $\text{Vect}(f_0)$. Il est alors plus succinct de dire :

$$\ker(u) = \text{Vect}(f_0).$$

Passons à l'image de u . Comme E est engendré par \mathcal{B} , l'image de u est engendrée par $u(\mathcal{B})$. Or, d'après la question précédente :

$$\text{im}(u) = \text{Vect}(u(\mathcal{B})) = \text{Vect}\left(\left(u(f_{-1})\right) \cup \left(u(f_k)_{k \in [0,p]}\right)\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in [0,p]}\right).$$

Puisque $-kf_k$ est nulle pour $k = 0$, on peut sans dommage retirer cette fonction des combinaisons linéaires de $(f_0) \cup (-kf_k)_{k \in [0,p]}$. On a alors $\text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in [0,p]}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in [1,p]}\right)$. Multiplier des vecteurs par des scalaires non nuls ne change pas le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, donc : $\text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in [1,p]}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(f_k\right)_{k \in [1,p]}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_k\right)_{k \in [0,p]}\right)$. En conclusion :

$$\text{im}(u) = \text{Vect}\left(\left(f_k\right)_{k \in [0,p]}\right).$$

Remarque. Un autre argument serait d'utiliser la question précédente pour montrer que $f_0, \dots, f_p \in \text{im}(u)$. Comme un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire, on a aussi : $\text{Vect}(f_0, \dots, f_p) \subseteq \text{im}(u)$. Le premier espace vectoriel admet pour base (f_0, \dots, f_p) , donc il est de dimension $p+1$, tandis que $\text{im}(u)$ est de dimension $(p+2) - \dim(\ker(u)) = p+1$ grâce au théorème du rang. L'inclusion, et l'égalité des dimensions, impliquent l'égalité des espaces.

(2.4) On a vu dans la question précédente que $f_{-1} \notin \text{im}(u)$, donc : $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$.

(2.5) On reprend les calculs effectués dans la question 2.1, et on en déduit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Une écriture par blocs serait plus lisible, et surtout très agréable d'emploi pour les deux questions suivantes. Si l'on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}),$$

alors on a : $M = \begin{pmatrix} A & 0_{M_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{p,2}(\mathbb{R})} & D \end{pmatrix}$.

(2.6) Il revient au même de déterminer si u ou si M est diagonalisable. Étudions si M l'est.

On sait calculer le déterminant d'une matrice diagonale par blocs : c'est le produit des déterminants des blocs diagonaux. La question précédente implique donc facilement, en considérant le déterminant de $\lambda I_{p+2} - M$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\chi_M = \chi_A \times \chi_D = X^2 \times \prod_{k=1}^p (X + k).$$

On en déduit notamment que 0 est valeur propre de M , d'ordre de multiplicité 2, or $\dim(\ker(M)) = \dim(\ker(u)) = 1 < 2$ d'après notre étude de la question 2.3. D'après le critère de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable, et donc u non plus.

Remarque. C'est un exercice relativement fréquent de montrer que si un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable, alors : $\ker(u) \oplus \text{im}(u) = E$. Or la description explicite qu'on a trouvée de $\ker(u)$ et $\text{im}(u)$ montre que $\ker(u) \cap \text{im}(u) = \text{Vect}(f_0) \neq \{0_E\}$, donc on pouvait déjà montrer dès la question 2.3 que u n'est pas diagonalisable.

(2.7) Avec les notations de la question 2.5, on a : $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0_{M_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{p,2}(\mathbb{R})} & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{M_2(\mathbb{R})} & 0_{M_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{p,2}(\mathbb{R})} & D^2 \end{pmatrix}$ (calcul direct pour A^2). C'est une matrice diagonale, donc u^2 admet une matrice diagonale dans la base \mathcal{B} : on en déduit que u^2 est diagonalisable.

3. Soit $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur J et vérifiant : $\forall t \in J, f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$. Ceci équivaut à :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}.$$

On reconnaît, dans le membre de droite, la dérivée de $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^2}{2}$ (en effet c'est de la forme $u'u$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$). Donc cette égalité est vraie si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad y(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c,$$

ce qui donne l'ensemble des solutions de (ED).

4. (4.1) Déterminons d'abord h_2 . D'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in J, h_2(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c$. Or $h_2(0) = 0$ par hypothèse, donc l'égalité précédente implique $c = 0$. Ainsi h_2 est l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^2}{2}$, et déterminer h_3 revient à résoudre :

$$\forall t \in J, \quad h'_3(t) = \frac{1}{2} \frac{(\ln(1+t))^2}{1+t}.$$

Le membre de droite est (à la constante $\frac{1}{2}$ près) de la forme $u'u^2$, donc en imitant la résolution de (ED) on en déduit l'existence de $c' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad h_3(t) = \frac{(\ln(1+t))^3}{6} + c'.$$

Comme $h_3(0) = 0$, on a encore $c' = 0$, donc h_3 est l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^3}{6}$, d'où le résultat demandé.

(4.2) On démontre par récurrence sur k que pour tout entier $k \geq 2$ et tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$. L'initialisation a déjà été effectuée dans les deux questions précédentes.

Montrons l'hérédité de cette proposition. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que pour tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$. Alors h_{k+1} est, par définition, l'unique application à vérifier :

$$\begin{cases} \forall t \in J, & h'_{k+1}(t) = \frac{h_k(t)}{1+t} = \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}, \\ & h_{k+1}(0) = 0. \end{cases}$$

(Notons que l'existence d'une telle application est assurée *a priori* par le théorème fondamental de l'analyse.)

L'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}$ est de la forme $u'u^k$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$, donc une primitive en est $\frac{u^{k+1}}{k+1}$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1}$. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad h_{k+1}(t) = \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1} + c = \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!} + c,$$

et la condition $h_{k+1}(0) = 0$ donne $c = 0$. Donc h_{k+1} est bien l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!}$, ce qui démontre le résultat voulu au rang $k+1$.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par récurrence on a montré que pour tout entier $k \geq 2$, la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$ est l'application $h_k : t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$.

5. (5.1) Soit $t \in J$. On veut montrer que la série $\sum_{k \geq 2} h_k(t) = \sum_{k \geq 2} \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$ est convergente.

Pour cela, on note qu'on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$ est convergente.

En prenant $z = \ln(1+t)$, on a donc le résultat voulu.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} h_k$ converge simplement sur J , et sa somme H vérifie :

$$\forall t \in J, \quad H(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^k}{k!} - 1 - \ln(1+t) = \exp(\ln(1+t)) - 1 - \ln(1+t),$$

c'est-à-dire : $\forall t \in J, H(t) = (1+t) - 1 - \ln(1+t) = t - \ln(1+t)$.

(5.2) D'après la question précédente, H est l'application $t \mapsto t - \ln(1+t)$. Comme $t \mapsto \ln(1+t) = f_{-1}(t) \in E$, la fonction H appartient à E si et seulement si l'application $t \mapsto t$ y appartient. Montrons que ce n'est pas le cas, en raisonnant par l'absurde : si $t \mapsto t \in E = \text{Vect}(\mathcal{B})$, alors il existe $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad t = \sum_{k=-1}^p a_k f_k(t) = a_{-1} \ln(1+t) + \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(1+t)^k}.$$

Le fait que $t \mapsto t$ et les f_k , pour $k \geq 0$, aient une limite finie en -1 , implique nécessairement que $a_{-1} = 0$ (car $\ln(1+t) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -\infty$). Mais alors l'égalité ci-dessus devient contradictoire quand $t \rightarrow +\infty$: le membre de gauche admet une limite infinie en $+\infty$, tandis que le membre de droite tend vers a_0 . C'est absurde. On en déduit qu'une telle égalité ne peut pas se produire, et donc que $t \mapsto t \notin E$. Ainsi H n'appartient pas à E non plus.

(5.3) L'application H est dérivable en tant que différence de deux fonctions usuellement dérivables, et on a :

$$\forall t \in J, \quad H'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = f_0(t) - f_1(t),$$

donc : $H' = f_0 - f_1 \in E$. D'où le résultat.

Exercice 2

1. Notons qu'il existe bien une racine carrée positive : on a $0^2 - 0 - 1 = -1 < 0$ et $x^2 - x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'application $x \mapsto x^2 - x - 1$ s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$, en un réel noté γ .

On a $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$, donc : $\gamma^2 = \gamma + 1$. Comme $\gamma > 0$ d'après l'étude ci-dessus, on a : $\gamma + 1 > 1$. On en déduit $\gamma^2 > 1$, et donc $\gamma > 1$ par extraction de racine carrée.

Soit μ la seconde racine (éventuellement complexe *a priori*) de $X^2 - X - 1$. D'après les relations coefficients-racines, on a $\gamma\mu = -1$, et donc : $\mu = -\frac{1}{\gamma}$: d'où le résultat demandé.

Remarque. On pouvait bien sûr répondre à cette question après explicitation des racines de $X^2 - X - 1$, qui sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mais les vérifications que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ et que $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ sont plus calculatoires que le raisonnement ci-dessus.

2. L'équation caractéristique de la relation de récurrence définissant les suites de S est $x^2 - x - 1 = 0$. Comme on l'a vu dans la question précédente, elle admet deux racines distinctes γ et $-\frac{1}{\gamma}$ (elles sont bien distinctes car $\gamma > 1$ et donc $-\frac{1}{\gamma} \in]-1, 0[$), donc la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 assure l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = a\gamma^n + b \left(-\frac{1}{\gamma} \right)^n = a\gamma^n - \frac{(-1)^{n+1}b}{\gamma^n}.$$

De plus, $y_0 = 0$ ce qui implique la relation $a + b = 0$, ou encore : $a = -b$. Pour poursuivre, on pourrait traduire la condition $y_1 = 1$, et résoudre le système vérifié par a et b . Mais l'énoncé nous aide en proposant trois solutions, et en affirmant qu'une seule d'entre elles est correcte. On note que a et b doivent être opposés, et donc les coefficients en facteur de γ^n et $\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n}$ doivent être égaux dans l'égalité correcte : or c'est bien le cas dans l'égalité (3), et ceci suffit pour notre affaire. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n} \right).$$

3. (3.1) Comme X_0 et X_1 suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ , et sont indépendantes, c'est un résultat de cours que leur somme $X_2 = X_0 + X_1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Une démonstration très efficace passe par les fonctions génératrices.
- (3.2) Il s'agit de trouver un couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $P(X_1 = k, X_2 = \ell) \neq P(X_1 = k)P(X_2 = \ell)$. Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a nécessairement $X_2 \geq X_1$ (car $X_2 = X_1 + X_0$ et X_0 est à valeurs dans \mathbb{N}), donc le membre de gauche est nul dès que $\ell < k$. C'est ce qui motive mon choix de (k, ℓ) .

Prenons : $(k, \ell) = (1, 0)$. Alors $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0$ puisqu'il s'agit de la probabilité d'une évènement impossible, pour la raison qu'on vient de donner, or :

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^0}{0!} = e^{-(2\lambda+\mu)} \lambda \neq 0,$$

donc : $P(X_1 = 1, X_2 = 0) \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)$, ce qu'on voulait démontrer. Ainsi X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

- (3.3) Montrons par récurrence *double* sur n qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1. \tag{Proposition P_n}$$

Pour $n = 1$, on a par définition de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $y_{n-1} = y_0 = 0$, et : $y_n = y_1 = 1$, donc : $y_{n-1}X_0 + y_nX_1 = y_0X_0 + y_1X_1 = X_1$, ce qui montre qu'on a P_1 .

Pour $n = 2$, on a besoin de calculer y_2 . On a : $y_2 = y_1 + y_0 = 1 + 0 = 1$, donc pour $n = 2$ on a : $y_{n-1}X_0 + y_nX_1 = y_1X_0 + y_2X_1 = X_0 + X_1 = X_2$, ce qui montre qu'on a P_2 . Ainsi on a bien P_1 et P_2 , d'où l'initialisation.

Montrons à présent l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n et P_{n+1} . Montrons P_{n+2} . Pour cela, calculons X_{n+2} :

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= X_{n+1} + X_n \stackrel{(P_{n+1} \text{ et } P_n)}{=} (y_nX_0 + y_{n+1}X_1) + (y_{n-1}X_0 + y_nX_1) \\ &= (y_{n-1} + y_n)X_0 + (y_n + y_{n+1})X_1. \end{aligned}$$

Or la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à S , donc elle vérifie la relation de récurrence : $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$, et (en remplaçant n par $n - 1$) : $y_{n+1} = y_{n-1} + y_n$. Donc :

$$X_{n+2} = y_{n+1}X_0 + y_{n+2}X_1 = y_{(n+2)-1}X_0 + y_{n+2}X_1,$$

et on a bien P_{n+2} : d'où l'hérédité.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, on a P_n pour tout entier $n \geq 1$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.

(3.4)

3.4.1. Les variables aléatoires X_0 et X_1 suivent une loi de Poisson, donc elles sont d'espérance finie (et on a : $x_0 = E(X_0) = \lambda$, $x_1 = E(X_1) = \mu$). Donc, par linéarité de l'espérance, X_p est aussi d'espérance finie, et on a :

$$x_p = E(X_p) = y_{p-1}E(X_0) + y_pE(X_1) = y_{p-1}\lambda + y_p\mu.$$

3.4.2. D'après la question 2, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad y_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^p + \frac{(-1)^{p+1}}{\gamma^p} \right).$$

Or, d'après la première question, on a $\gamma > 1$, donc $\gamma^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$, tandis que $\left| \frac{1}{\gamma} \right| < 1$ donc : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{\gamma^p} = 0$. On en déduit que $\left(\frac{(-1)^{p+1}}{\gamma^p} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\gamma^p)_{p \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout p au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} x_p = y_{p-1}\lambda + y_p\mu &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^{p-1} + \frac{(-1)^p}{\gamma^{p-1}} \right) \lambda + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^p + \frac{(-1)^{p+1}}{\gamma^p} \right) \mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\lambda + \gamma\mu)\gamma^{p-1} + (-1)^p \left(\frac{\lambda}{\gamma^{p-1}} - \frac{\mu}{\gamma^p} \right) \right] \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda + \gamma\mu}{\sqrt{5}} \gamma^{p-1}. \end{aligned}$$

(3.5) Les variables aléatoires X_0 et X_1 suivent une loi de Poisson, donc elles sont de variance finie (et on a : $V(X_0) = \lambda$, $V(X_1) = \mu$). Elles sont de plus *indépendantes* par hypothèse, donc $y_{p-1}X_0$ et y_pX_1 également. On en déduit que $X_p = y_{p-1}X_0 + y_pX_1$ est de variance finie, et :

$$V(X_p) = V(y_{p-1}X_0) + V(y_pX_1) = y_{p-1}^2V(X_0) + y_p^2V(X_1) = y_{p-1}^2\lambda + y_p^2\mu.$$

(3.6) Comme X_p et X_q admettent des variances, leur covariance est bien définie. Comme la covariance est une forme bilinéaire, on trouve après développement :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_p, X_q) &= \text{Cov}(y_{p-1}X_0 + y_pX_1, y_{q-1}X_0 + y_qX_1) \\ &= y_{p-1}y_{q-1}\text{Cov}(X_0, X_0) + (y_{p-1}y_q + y_{q-1}y_p)\text{Cov}(X_0, X_1) + y_py_q\text{Cov}(X_1, X_1). \end{aligned}$$

On sait que X_0 et X_1 sont indépendantes, donc : $\text{Cov}(X_0, X_1) = 0$. De plus : $\text{Cov}(X_0, X_0) = V(X_0) = \lambda$, et de même : $\text{Cov}(X_1, X_1) = \mu$. Donc finalement :

$$\text{Cov}(X_p, X_q) = y_{p-1}y_{q-1}\lambda + y_py_q\mu.$$

Le terme de rang n de la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est nul pour $n = 0$ et strictement positif sinon (on le démontrerait rapidement par récurrence à partir de la relation $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, du fait que $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$). Comme on a supposé $p \geq 2$ et $q \geq 2$, on a $p - 1 \geq 1$ et $q - 1 \geq 1$, donc $y_{p-1}y_{q-1} > 0$. De même, $y_py_q > 0$. Les paramètres λ et μ sont aussi strictement positifs, et on en déduit : $\text{Cov}(X_p, X_q) > 0$.

La covariance de X_p et X_q n'étant jamais nulle pour $p, q \geq 2$, on en déduit que les variables aléatoires X_p, X_q ne sont jamais indépendantes pour $p, q \geq 2$ (et en fait, en y regardant de plus près, le seul cas où elles sont indépendantes est celui où $\{p, q\} = \{0, 1\}$).

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrons que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \exp(-t^n) dt$ converge. L'application $t \mapsto \exp(-t^n)$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour tout t au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\exp(-t^n) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right) ;$$

en effet, d'après le théorème des croissances comparées : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \exp(-t^n) = 0$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. La fonction $t \mapsto \exp(-t^n)$ étant positive, on peut utiliser le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, et on en déduit que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \exp(-t^n) dt$ converge : d'où le résultat.

2. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée, dont nous rappelons l'énoncé : soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I . On suppose que :

- $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leq \varphi$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est intégrable sur I ;
- l'application f est intégrable sur I ;
- la suite $\left(\int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Pour l'appliquer, on pose ici :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in [1, +\infty[, \quad f_n(t) = \exp(-t^n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est bien sûr continue sur $[1, +\infty[$ en tant que composée de l'exponentielle et d'une fonction puissance. De plus, pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a : $-t^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ (limite d'une suite géométrique de raison $t > 1$), tandis que pour $t = 1$ on a : $-t^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$. Par composition avec l'exponentielle, on en déduit :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1, \\ \exp(-1) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

ce qui démontre la convergence simple sur $[1, +\infty[$ de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vers l'application continue par morceaux : $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ \exp(-1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$. Il reste à vérifier l'hypothèse de domination. Pour cela, on note que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [1, +\infty[$, on a $t^n \geq t$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in [1, +\infty[, \quad |f_n(t)| \leq \exp(-t), \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \exp(-t)$ est usuellement continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$ en particulier. L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et on en déduit la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1} = \left(\int_1^{+\infty} \exp(-t^n) dt \right)_{n \geq 1}$. On a de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0,$$

d'où le résultat.

Remarque. Même si je pense que le concepteur du sujet s'attendait effectivement à l'emploi du théorème de convergence dominée, il existe un moyen bien plus rapide d'obtenir ce résultat. Il est en effet facile de démontrer, par une étude de variations ou l'utilisation de la formule du binôme de Newton, que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $(1 + u)^n \geq 1 + nu$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, en prenant $u = t - 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall t \in [1, +\infty[, t^n \geq 1 + n(t - 1)$. Cela nous ramène à une intégrale rapidement calculable :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \exp(-1 - n(t - 1)) dt = e^{-1} \left[\frac{e^{-n(t-1)}}{-n} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut avec le théorème des gendarmes.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et de classe C^1 sur cet intervalle, donc le changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale I_n est licite. On a $du = nt^{n-1}dt$, de sorte que :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t^n)}{nt^{n-1}} (nt^{n-1}dt) = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t^n)}{(t^n)^{\frac{n-1}{n}}} (nt^{n-1}dt) = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du.$$

4. D'après la question, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $nI_n = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$. Calculons la limite de cette dernière intégrale, encore une fois grâce au théorème de convergence dominée. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall u \in [1, +\infty[, \quad g_n(u) = \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}.$$

C'est un quotient d'une exponentielle et d'une fonction puissance, donc g_n est continue sur $[1, +\infty[$ pour tout entier $n \geq 1$. De plus, pour tout $u \in [1, +\infty[$, on montre qu'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{u}$ (en cas de doute dans ce calcul de limite, écrire : $\frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} = e^{-\frac{n-1}{n} \ln(u)}$), et on en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers l'application $g : u \mapsto \frac{\exp(-u)}{u}$, qui est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $u \in [1, +\infty[$:

$$|g_n(u)| = \frac{\exp(-u)}{u} u^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\exp(-u)}{u} u^1 = \exp(-u) \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $\varphi : u \mapsto \exp(-u)$ est usuellement continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$ en particulier. L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du.$$

Notons J cette intégrale. On a montré : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = J$.

5. On a immédiatement : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{J}{n}$.
6. (6.1) On a $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{J}{n}$, avec $J > 0$ (car c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[1, +\infty[$). On en déduit que les séries entières $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ ont même rayon de convergence. Or cette dernière série entière est usuelle : elle est de rayon de convergence 1, sa somme étant l'application $x \mapsto -\ln(1 - x)$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ est $R = 1$.

(6.2) D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$. Il reste à savoir si elle converge pour $x = 1$ et $x = -1$.

Prenons $x = 1$. On s'intéresse donc à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} I_n$. Or : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{J}{n} > 0$,

et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} I_n$ diverge aussi, et donc f n'est pas définie en $x = 1$.

Prenons $x = -1$. On s'intéresse donc à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$. Nous allons montrer qu'elle converge en utilisant le théorème spécial des séries alternées. Pour cela, on note que $I_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$ par croissance de l'intégrale (en effet une exponentielle est positive), donc la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est bien alternée. De plus, on sait déjà que la suite

$(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 : c'était l'objet de la question 2. Il reste à démontrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Mais pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \geq 1$, on a : $t^{n+1} \geq t^n$, donc pour ces mêmes valeurs de n et t on a : $\exp(-t^{n+1}) \leq \exp(-t^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, I_{n+1} \leq I_n$, donc la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Toutes les hypothèses du théorème spécial des séries alternées étant vérifiées, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ converge, donc f est définie pour $x = -1$.

En conclusion, f est définie sur $[-1, 1[$.

Exercice 4

1. Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $E = \bigoplus_{j=1}^m E_j$, il existe $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in \prod_{j=1}^m E_j$ tel que : $\vec{x} = \sum_{j=1}^m \vec{x}_j$. Avant de parler de projecteurs, notons d'abord que si l'on applique u à cette égalité, on a par linéarité : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m u(\vec{x}_j)$ et comme \vec{x}_j appartient au sous-espace propre de u associé à λ_j , et ce pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et donc : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{x}_j$. Par une récurrence facile :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \vec{x}_j. \tag{1}$$

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Par définition, \vec{x}_j est la projection de \vec{x} sur E_j parallèlement à $F_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m E_i$. Par conséquent, si l'on définit p_j comme le projecteur sur E_j parallèlement à F_j , alors l'égalité (1) peut se réécrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k p_j(\vec{x}). \tag{*}$$

Ainsi les p_j sont des projecteurs, non nuls car leurs images sont les E_j (qui sont des sous-espaces propres, donc non réduits à $\{\vec{0}\}$), et d'après (*) on a : $u^k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k p_j$. D'où le résultat.

2. (2.1) L'égalité $P(u) = \sum_{j=1}^m P(\lambda_j) p_j$ est vraie pour tout P de la forme $P = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'après (*), et comme la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{C}[X]$ on en déduit, par linéarité, que l'égalité est vraie pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

Les familles génératrices *infinies* ne sont pas au programme de PSI, donc si l'on ne veut pas se permettre ce petit écart on traite cette question en écrivant $P \in \mathbb{C}[X]$ sous la forme : $P = \sum_{\ell=0}^d a_\ell X^\ell$, de sorte que : $P(u) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell u^\ell$. On a alors le résultat en utilisant (*) pour exprimer u^ℓ en fonction des p_j :

$$P(u) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell u^\ell = P(u) = \sum_{\ell=0}^d a_\ell \sum_{j=1}^m \lambda_j^\ell p_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\ell=0}^d a_\ell \lambda_j^\ell \right) p_j = \sum_{j=1}^m P(\lambda_j) p_j.$$

(2.2) D'après le critère polynomial de diagonalisation, u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé et à racines simples. Or, d'après la question précédente, pour trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(u) = 0_{L(E)}$, il suffit d'avoir : $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, P(\lambda_j) = 0$.

Un polynôme vérifiant cette condition est : $P = \prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)$. En effet, toutes ses racines sont exactement les λ_j , donc $P(\lambda_j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et d'après l'égalité de la question précédente on a : $P(u) = 0_{L(E)}$. Ceci montre que P est un polynôme annulateur de u , mais encore faut-il s'assurer qu'il est scindé et à racines simples : il est évidemment scindé par définition, et il est à racines simples que ses facteurs $X - \lambda_j$ sont tous distincts ; en effet, les λ_j sont supposés tous différents, d'où le résultat.

Ainsi u admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples, donc d'après le critère polynomial de diagonalisation : u est diagonalisable.

(2.3)

2.3.1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$. Si $i = j$, alors : $L_j(\lambda_i) = L_j(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m 1 = 1$ Si $i \neq j$,

alors on constate que dans le produit $L_j(\lambda_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$, le facteur correspondant à

$k = i$ (choix possible car $i \neq j$) est égal à $\frac{\lambda_i - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_k} = 0$, donc : $L_j(\lambda_i) = 0$.

En résumé, on a montré que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$:

$$L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

2.3.2. Montrons d'abord que la famille \mathcal{B} , qui est bien constituée de polynômes de degré $m - 1$ (et donc dans $\mathbb{C}_{m-1}[X]$), est une famille libre : soit $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ tel que : $\sum_{j=1}^m \alpha_j L_j = 0$.

Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, évaluer cette égalité en λ_i donne : $\sum_{j=1}^m \alpha_j L_j(\lambda_i) = 0$. Or, d'après la question précédente :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \sum_{j=1}^m \alpha_j L_j(\lambda_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_j \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1} = \alpha_i,$$

et donc l'égalité $\sum_{j=1}^m \alpha_j L_j(\lambda_i) = 0$ équivaut à : $\alpha_i = 0$. C'est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, ce qui prouve que la famille \mathcal{B} est libre. Comme, de plus, elle est cardinal $m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$, c'est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$: d'où le résultat.

2.3.3. Comme \mathcal{B} est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$, il existe $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ tel que : $P = \sum_{j=1}^m \alpha_j L_j$. Déterminer les coordonnées de P dans cette base revient à déterminer les α_j .

Pour trouver la valeur de α_i pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il suffit d'évaluer cette égalité en un nombre complexe qui « élimine » tous les termes de la somme du membre de droite, sauf celui qui correspond à $j = i$ (afin d'isoler α_i). Nous y parvenons par une évaluation en λ_i . On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad P(\lambda_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_j L_j(\lambda_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_j \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1} = \alpha_i,$$

donc : $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \alpha_i = P(\lambda_i)$. On a montré : $P = \sum_{j=1}^m P(\lambda_j) L_j$.

(2.4) Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Posons $P = L_j$ dans l'identité de la question 2.1. On a alors :

$$L_j(u) = \sum_{i=1}^m L_j(\lambda_i) p_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} p_i + \underbrace{L_j(\lambda_j)}_{=1} p_j = p_j,$$

d'où le résultat.

(2.5) On nous demande de montrer : $\text{Sp}(u) = \{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$.

Montrons d'abord que les valeurs propres de u sont *parmi* les λ_j : soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, et notons \vec{x} un vecteur propre de u associé à λ . Comme on l'a vu dans la question 2.2, si l'on pose $P = \prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)$, alors $P(u) = 0_{L(E)}$, donc : $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$. Mais, si l'on développe P ainsi :

$P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, on voit qu'on a aussi :

$$P(u)(\vec{x}) = \sum_{i=0}^d a_i u^i(\vec{x}) = \sum_{i=0}^d a_i \lambda^i \vec{x} = P(\lambda) \vec{x},$$

l'égalité $u^i(\vec{x}) = \lambda^i \vec{x}$ se démontrant aisément par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. On a donc à la fois $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ et $P(u)(\vec{x}) = P(\lambda) \vec{x}$, ce qui implique : $P(\lambda) \vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ en tant que vecteur propre, il reste : $P(\lambda) = 0$. Or les racines de P sont exactement les λ_i , donc $\lambda \in \{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$. On a montré une première inclusion : $\text{Sp}(u) \subseteq \{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$.

Montrer l'inclusion réciproque : $\{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\} \subseteq \text{Sp}(u)$, revient à démontrer que les λ_j sont des valeurs propres de u . Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Pour montrer que λ_j est une valeur propre de u , je vais expliciter un vecteur $\vec{x}_j \in E$ non nul tel que $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$. Pour en trouver un, je vais m'inspirer de ce qui fut observé dans la question 1 : dans cette question, λ_j était effectivement une valeur propre de u , et son sous-espace propre associé était l'image du projecteur p_j . Si tout se passe bien, ce devrait rester vrai ici même si l'on n'est plus tout à fait dans les hypothèses de la question 1 (mais presque : la différence est la connaissance du spectre).

C'est ce qui motive le raisonnement qui suit : soit $\vec{x}_j \in \text{im}(p_j) \setminus \{\vec{0}\}$ (par hypothèse de l'énoncé p_j n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe bien un tel vecteur). Il existe donc $\vec{y}_j \in E$ tel que : $\vec{x}_j = p_j(\vec{y}_j) = L_j(u)(\vec{y}_j)$. Montrons : $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$. Pour cela, on note que d'après (*), et la question précédente, on a :

$$u(\vec{x}_j) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i(\vec{x}_j) \stackrel{(q.2.4)}{=} \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(u)(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(u)(L_j(u)(\vec{y}_j)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i L_i(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j).$$

Or il s'avère que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$, on a : $L_i(u) \circ L_j(u) = 0_{L(E)}$ si $i \neq j$, et : $L_i(u) \circ L_j(u) = L_j(u)$ si $i = j$ (ce qui montre en passant que $L_i(u)$ est un projecteur).

Admettons-le *provisoirement* : je le démontrerai plus bas. Si ce fait est établi, alors l'égalité ci-dessus implique :

$$u(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \lambda_i \underbrace{L_i(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j)}_{=\vec{0}} + \lambda_j \underbrace{L_j(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j)}_{=L_j(u)(\vec{y}_j)} = \lambda_j L_j(u)(\vec{y}_j) = \lambda_j \vec{x}_j,$$

et comme $\vec{x}_j \neq \vec{0}$ cela prouve que λ_j est une valeur propre de u , un vecteur propre associé étant \vec{x}_j (on pourrait montrer, mais ce n'est pas exigé, qu'en fait le sous-espace propre associé est exactement $\text{im}(p_j)$).

On a donc montré $\{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\} \subseteq \text{Sp}(u)$, l'autre inclusion ayant été établie au début de la question. D'où le résultat demandé :

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda_j \mid j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}.$$

Démontrons à présent le résultat qui fut admis provisoirement, à savoir :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad L_i(u) \circ L_j(u) = \begin{cases} 0_{L(E)} & \text{si } i \neq j, \\ L_j(u) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$. Supposons d'abord que i et j sont distincts. Au vu de la définition des L_j , il est évident que pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, le polynôme $X - \lambda_k$ divise soit L_i (si $i \neq k$), soit L_j (si $j \neq k$), donc en tous les cas il divise $L_i \cdot L_j$. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$L_i \cdot L_j = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k) \cdot Q. \text{ En évaluant en } u, \text{ on obtient : } L_i(u) \circ L_j(u) = \prod_{k=1}^m (u - \lambda_k \text{Id}_E) \circ Q(u). \text{ Or,}$$

comme on l'a rappelé au début du traitement de cette question, on a : $\prod_{k=1}^m (u - \lambda_k \text{Id}_E) = 0_{L(E)}$.

On en déduit l'égalité voulue dans le cas où i et j sont distincts : $L_i(u) \circ L_j(u) = 0_{L(E)}$.

Supposons à présent $i = j$. On note que l'égalité (*) donne, quand $k = 0$: $\text{Id}_E = \sum_{\ell=1}^m p_\ell = \sum_{\ell=1}^m L_\ell(u)$. En composant à gauche chaque membre de l'égalité par $L_j(u)$, on a alors :

$$L_j(u) = L_j(u) \circ \left(\sum_{\ell=1}^m L_\ell(u) \right) = \sum_{\ell=1}^m L_j(u) \circ L_\ell(u) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^m L_j(u) \circ L_\ell(u) + L_j(u) \circ L_j(u),$$

et d'après ce qu'on vient de démontrer on a $L_j(u) \circ L_\ell(u) = 0_{L(E)}$ dès que $\ell \neq j$. On en déduit : $L_j(u) = L_j(u) \circ L_j(u)$, d'où le résultat. Ceci achève de démontrer le résultat qui fut admis ci-dessus.