Centrale 2008. Filière MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Méthode de Gauss et factorisation.

I.A - Résolution d'un système triangulaire.

1. A est triangulaire supérieure inversible donc ses coefficients diagonaux sont non nuls. Il vient immédiatement : $u_n = \dfrac{1}{a_{n,n}} w_n$ puis pour k de 1 à $n-1$: $u_{n-k} = \dfrac{1}{a_{n-k,n-k}} \Big(w_{n-k} - \sum\limits_{i=n-k+1}^{n} a_{n-k,i} u_i \Big)$. $\square$

Algorithme :

```
u[n]=w[n]/a[n,n]
Pour k de 1 à n-1 faire
  temp <-0
  Pour i de n-k+1 à n faire
    temp <- temp+a[n-k,i]*u[i]
  Fin pour i
  u[n-k] <- (w[n-k]-temp)/a[n-k,n-k]
Fin pour k
```

2. L'étape k dans l'algorithme ci-dessus exige k additions, k multiplications et une division.
Le coût total est donc de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications et n divisions. $\square$

I.B - Matrices d'élimination de Gauss.

1. Par définition du produit matriciel on a $L_q(P) = \Big(L_q(M)C_1(A), L_q(M)C_2(A), \ldots, L_q(M)C_n(A) \Big)$ donc $L_q(P) = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{q,j} L_j(A)$. $\square$

2.

a. $F(k,\beta)$ ne dépend évidemment pas de la matrice A et en particulier avec $A = Id$ il vient par définition de l'action de $F(k,-\beta)$: $F(k,-\beta) \times F(k,\beta) Id = Id$. $\square$

b. Pour $q \in [[1,n]]$ la matrice $\Delta_q(P)$ est obtenue à partir de la matrice $\Delta_q(A)$ en conservant les k premières lignes et en modifiant les $q-k$ suivantes (si $q > k$) par les opérations lignes $L_i \longleftarrow L_i + \beta_i L_k$ pour $i \in [[k+1,q]]$.
Le caractère q-linéaire et alterné du déterminant D_q prouve alors que $D_q(P) = D_q(A)$. $\square$

c. D'après la question I.B.1), on obtient immédiatement :

$$F(k,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{k+1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

a. De même qu'en I.B.1), on a $C'_j = {}^t\Big(L_1(M)C_j(F), L_2(M)C_j(F), \ldots, L_n(M)C_j(F) \Big)$.

Donc si $j \neq k$ on a $C'_j = C_j$ et $C'_k = C_k + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \beta_i C_i$. $\square$

b Notons une légère erreur d'énoncé : il faut supposer ici que q est un entier compris entre 1 et $n-1$ (et non pas n).
Il s'agit de prouver que :

$$F(1,\beta_1)F(2,\beta_2)\dots F(q,\beta_q)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{2,1} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \beta_{q+1,q} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & 0 & \beta_{n,q} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est évidemment vrai pour $q=1$ et en supoosant que c'est vrai au rang $q-1$ (avec $q \geqslant 2$) la question précédente prouve immédiatement que c'est vrai au rang q. $\square$

En particulier pour $q=n-1$ le dessin de la matrice P_q ci-dessus prouve que $P_{n-1}=[\mathbf{b_1},\mathbf{b_2},\dots,\mathbf{b_{n-1}},\mathbf{e_n}]$. $\square$

I.C - Factorisation de A.

1. $\Delta_1(A)=(a^1_{1,1})$ est inversible par hypothèse donc $a^1_{1,1}\neq 0$. $\square$
Compte-tenu de l'action résultant du produit à gauche par une matrice de pseudo-transvection (question I.B.2)), pour que la première colonne de $A_2=F(1,-\beta_1)A_1$ soit égale à $a^1_{1,1}\mathbf{e_1}$ il suffit de choisir :
$\beta_1={}^t\big(\dfrac{a^1_{2,1}}{a^1_{1,1}},\ \dfrac{a^1_{3,1}}{a^1_{1,1}},\ \dots\ ,\ \dfrac{a^1_{n,1}}{a^1_{1,1}}\big)$. $\square$
La première ligne n'est pas modifiée donc la première ligne de A_2 est égale à la première ligne de A_1. $\square$

2.

a. Soit, pour $k\geqslant 2$, le prédicat :
$\mathcal{P}_k$: «il existe F_{k-1} telle que $A_k=F_{k-1}A_{k-1}$ ait ses $(k-1)$ premières colonnes "trigonalisées supérieurement" avec en outre ses n mineurs principaux non nuls.»

$\mathcal{P}_2$ est vrai car $A_2=F_1A_1$ a bien sa première colonne "trigonalisée" et en outre, pour $m\in[[1,n]]$, on a $D_m(A_2)=D_m(A_1)$ (donc non nul par hypothèse) d'après la question I.B.2.b.

Supposons $\mathcal{P}_k$ vrai pour $2\leqslant k\leqslant n-1$. Alors $D_k(A_k)$ est triangulaire supérieure de déterminant non nul donc $a^k_{k,k}\neq 0$. La matrice A_{k+1} obtenue à partir de la matrice A_k en conservant les k premières lignes puis en effectuant $L_i \longleftarrow L_i-\dfrac{a^k_{i,k}}{a^k_{k,k}}L_k$ pour $k+1\leqslant i\leqslant n$ a bien ses k premières colonnes trigonalisées supérieurement. En outre les n mineurs principaux sont inchangés par rapport à ceux de A_{k-1} (question I.B.2.b.) donc sont non nuls. Enfin cette opération se traduit bien matriciellement par le produit à gauche par la matrice $F(k,-\beta_k)$
avec $\beta_k={}^t\big(\dfrac{a^k_{k+1,k}}{a^k_{k,k}},\ \dots\ ,\ \dfrac{a^k_{n,k}}{a^k_{k,k}}\big)$. Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vrai.

En conclusion $\mathcal{P}_k$ est vrai pour $2\leqslant k\leqslant n$. $\square$

b. On a noté ci-dessus que les k premières lignes de A_k et A_{k+1} sont égales. $\square$

c. Comme vu ci-dessus on passe de A_k à A_{k+1} sans modifier les k premières lignes puis en effectuant $L_i \longleftarrow L_i-\dfrac{a^k_{i,k}}{a^k_{k,k}}L_k$ pour $k+1\leqslant i\leqslant n$. Pour chacune de ces $(n-k)$ lignes, on calcule une fois pour toutes les coefficients $\lambda=\dfrac{a^k_{i,k}}{a^k_{k,k}}$, on remplit d'autorité les k premiers coefficients par des zéros puis on effectue $(n-k)$ multiplications et additions pour calculer les autres coefficients : $a^{k+1}_{i,j}=a^k_{i,j}-\lambda a^k_{k,j}$.

Au total on passe de A_k à A_{k+1} en effectuant $(n-k)$ divisions et $(n-k)^2$ additions et multiplications. $\square$

3. La matrice A_n notée désormais U est triangulaire supérieure et compte tenu de ce qui précède on a :
$U=F(n-1,-\beta_{n-1})F(n-2,-\beta_{n-2})\dots F(1,-\beta_1)A$ donc d'après I.B.2.a. $A=F(1,\beta_1)F(2,\beta_2)\dots F(n-1,\beta_{n-1})U$ donc $A=LU$ où L est la matrice triangulaire inférieure P_n de la question I.B.3.b et $U=A_n$. $\square$

4. Supposons que $A=L_1U_1=L_2U_2$ avec L_i triangulaire inférieure d'éléments diagonaux tous égaux à 1 et U_i triangulaire supérieure.
Comme A est inversible il en va de même de L_i et U_i de sorte que $L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$. Or le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec sur la diagonale le produit des éléments diagonaux correspondants. Ainsi $L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$ est triangulaire inférieure et supérieure donc diagonale avec des 1 sur la diagonale donc est égale à Id. $\square$

5. L'algorithme suivant transforme la matrice A en une matrice à partir de laquelle on obtient U en considérant la matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux et sur-diagonaux sont ceux de A et la matrice L en considérant la matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale dont les éléments sous-diagonaux sont ceux de A.

Pour k (indice d'étape) variant de 1 à $n-1$ (c'est l'indice noté $k-1$ dans l'étude ci-dessus) , on ne modifie pas les k premières lignes et pour les lignes i de $k+1$ à n on place en position k le coefficient correspondant de L c'est à dire $\alpha = \dfrac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$ puis on place sur les positions $j \geqslant (k+1)$ les coefficients correspondants de A_k c'est à dire $a_{i,j} - \alpha.a_{k,j}$.

Ce qui fournit par exemple le programme Maple suivant :

```
factorisation_LU := proc(M)
  A:=M: n:=linalg[rowdim](A):
  for k from 1 to (n-1) do
    for i from (k+1) to n do
      A[i,k] := A[i,k]/A[k,k]:
      for j from (k+1) to n do
        A[i,j] := A[i,j]-A[i,k]*A[k,j]
      od
    od
  od:
  evalm(A)
end:
```

6. On a vu précédemment qu'à l'étape k on effectue exactement $(n-k)$ divisions et $(n-k)^2$ additions et multiplications. La complexité de la factorisation LU est donc de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ divisions et $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ additions et multiplications.

Partie II. Applications et cas particuliers.

II.A - Application à la résolution de systèmes linéaires.

1. Le système s'écrit $LU\mathbf{u} = \mathbf{w}$ une fois la factorisation LU effectuée. On commence par résoudre $L\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ce qui exige 0 division (les éléments diagonaux de L sont égaux à 1) et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications. Puis on résout $U\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ce qui exige n divisions et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions et multiplications.
Ainsi une fois la factorisation $A = LU$ effectuée, la résolution d'un système linéaire de matrice A exige n divisions et $n(n-1)$ additions et multiplications. □

2. Pour inverser A on résout successivement les systèmes linéaires $A\mathbf{u} = \mathbf{e_j}$ pour j de 1 à n ce qui fournit les colonnes de A^{-1}.
Une fois la factorisation LU effectuée cela exige n^2 divisions et $n^2(n-1)$ multiplications et divisions vu la question précédente.
En tenant compte du coût de la factorisation calculé ci-dessus , le coût de l'inversion d'une matrice A factorisable LU c'est à dire telle que les n mineurs principaux soient non nuls est donc asymptotiquement de $\dfrac{3}{2}n^2$ divisions et $\dfrac{4}{3}n^3$ additions et multiplications. □

II.B - Étude du cas tridiagonal.

1. Par développement suivant la dernière colonne il vient pour $k \geqslant 3$: $\delta_k = b_k\delta_{k-1} - c_{k-1}a_k\delta_{k-2}$
Or $\delta_1 = b_1$ et $\delta_2 = b_1b_2 - c_1a_2$ de sorte que en posant $\delta_0 = 1$ la relation récurrente précédente est également vraie pour $k = 2$.
Ainsi la suite $(\delta_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est définie par $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = b_1$ et $\delta_k = b_k\delta_{k-1} - c_{k-1}a_k\delta_{k-2}$ pour $k \geqslant 2$. □

2. Les deux matrices proposées sont bien du type L et U de sorte que si $LU = A$ il s'agit bien de la factorisation LU de A vu son unicité.

Calculons donc le produit $P = LU$ en utilisant la question .B.1 :

- La première ligne de P est égale à la première ligne de U donc à la première ligne de A puisque $\dfrac{\delta_1}{\delta_0} = b_1$.
- Pour i compris entre 2 et $n-1$ la ligne i de P est égale à $a_i\dfrac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}L_{i-1}(U) + L_i(U)$ c'est à dire :

$$\left(0,\ \ldots\ ,\ 0,\ a_i\frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}\frac{\delta_{i-1}}{\delta_{i-2}},\ a_i\frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}c_{i-1} + \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}},\ c_i,\ 0,\ \ldots\ ,0\right) = \left(0,\ \ldots\ ,\ 0,\ a_1,\ \alpha_i,\ c_i,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0\right)$$

avec $\alpha_i = \dfrac{c_{i-1}a_i\delta_{i-2}+\delta_i}{\delta_{i-1}} == \dfrac{b_i\delta_{i-1}}{\delta_{i-1}} = b_i$ d'après la relation de récurrence sur les δ_k.
Ainsi la ligne i de P est donc bien égale à la ligne i de A pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

- La dernière ligne de P est égale à $a_n\dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}L_{n-1}(U) + L_n(U)$ c'est à dire :

$\left(0,\ \dots\ ,\ 0,\ a_n\dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}\dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}},\ a_n\dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}c_{n-1} + \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right) = \Big(0,\ \dots\ ,\ 0,\ a_n,\ b_n\Big)$ comme ci-dessus.
La dernière ligne de P est donc également égale à la dernière ligne de A.

En conclusion les deux matrices proposées sont donc bien les deux matrices de la factorisation LU de A. $\square$

3.

- Commençons par déterminer le coût de la factorisation LU d'une matrice tridiagonale.

Compte-tenu de la relation de récurrence, le calcul des δ_k exige $(n-1)\times\Big(3$ multiplications $+ 1$ addition$\Big)$.
Puis le calcul de L exige $(n-1)$ multiplications et $(n-1)$ divisions et celui de U $(n-1)$ divisions.
Le coût asymptotique de la factorisaton LU d'une matrice tridiagonale est donc de n additions, $4n$ multiplications et $2n$ divisions.

- Déterminons désormais le coût de la résolution du système linéaire $LU\mathbf{u} = \mathbf{w}$

La résolution de $L\mathbf{v} = \mathbf{w}$ exige $(n-1)$ multiplications et $(n-1)$ additions (et 0 division) car pour $2 \leqslant i \leqslant n$ on a $v_i = w_i - l_{i,i-1}v_{i-1}$
Puis la résolution de $U\mathbf{u} = \mathbf{v}$ exige n divisions, $(n-1)$ multiplications et divisions.
Le coût asymtotique est donc de $2n$ additions et multiplications et n divisions.

- Le coût total asymptotique de la résolution est donc de $3n$ additions, $6n$ multiplications et $3n$ divisions. $\square$

Algorithme (on note $d[k]$ pour δ_k et $l[i]$ pour $l_{i,i-1}$) :

```
(* Calcul des d[k] *)
d[0] <- 1: d[1] <- b[1]
Pour k de 2 à n faire
  d[k] <- b[k]+d[k-1]-c[k-1]d[k-2]
Fin pour k
(* Résolution de Lv=w *)
v[1] <- w[1]
Pour i de 2 n faire
  v[i] <- w(i]-(a[i]*d[i-2]*v[i-1])/d[i-1]
Fin pour i
(* Résolution de Uu=v *)
u[n] <- d[n-1]*v[n]/d[n]
Pour i de n-1 à 1 faire
  u[i] <- d[i-1]*(v[i]-c[i]*u[i+1])/d[i]
Fin pour i
```

II.C - Étude d'un exemple.

1.

a. Par la règle du dédoublement des tremes on a immédiatement :
$< A_n\mathbf{v}, \mathbf{v} >= 2\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum\limits_{i=2}^{n} v_{i-1}v_i = v_1^2 + v_n^2 + \sum\limits_{i=2}^{n}(v_i - v_{i-1})^2$. $\square$

b. $< A_n\mathbf{v}, \mathbf{v} >= 0$ implique $v_1 = v_n = 0$ et $v_1 = v_{i-1}$ pour $i \geqslant 2$ donc $\mathbf{v} = 0$.
Ainsi A_n est symétrique définie positive. $\square$

c. Clairement $\Delta_k(A_n) = A_k$ de sorte que $\Delta_k(A_n)$ est symétrique définie positive donc de déterminant non nul (strictement positif). Ainsi A_n admet une factorisation LU. $\square$

2. On a ici (Cf question II.B.1.) $\delta_k = 2\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$ donc (récurrence linéaire d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$) $\delta_k = \alpha + \beta n$. Les conditions initiales $\delta_0 = 1$ et $\delta_1 = 3$ implique $\alpha = \beta = 1$. Ainsi $\delta_k = k+1$. $\square$

Il en découle que $l_{i,i-1} = \dfrac{1-i}{i}$ et $u_{i,i} = \dfrac{i+1}{i}$ (naturellement $u_{i,i+1} = -1$) $\square$

3.

a. La résolution par l'algorithme de la descente de $L_n\mathbf{y} = \mathbf{e_k}$ fournit $y_i = 0$ pour i de 1 à $(k-1)$ puis $y_k = 1$ puis $y_{k+1} = -l_{k+1,k}\times 1 = \dfrac{k}{k+1}$ puis $y_{k+2} = -l_{k+2,k+1}\times y_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}\times\dfrac{k}{k+1} = \dfrac{k}{k+2}\ \dots$

L'itération est claire et ainsi $y_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $y_i = \dfrac{k}{i}$ pour $k \leqslant i \leqslant n$. $\square$

b. La résolution de $U_n\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par l'algorithme de la remontée fournit :

$$x_n = \frac{1}{u_{n,n}} \times y_n = \frac{n}{n+1} \times \frac{k}{n} = \frac{k}{n+1}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}}\Big(y_{n-1} + x_n\Big) = \frac{n-1}{n}\Big(\frac{k}{n-1} + \frac{k}{n+1}\Big) = \frac{k}{n+1}\Big(\frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n}\Big) = \frac{2k}{n+1}$$

$$x_{n-2} = \frac{1}{u_{n-2,n-2}}\Big(y_{n-2} + x_{n-1}\Big) = \frac{n-2}{n-1}\Big(\frac{k}{n-2} + \frac{2k}{n+1}\Big) = \frac{k}{n+1}\Big(\frac{n+1}{n-1} + \frac{2(n-2)}{n-1}\Big) = \frac{3k}{n+1}$$

L'itération se poursuit clairement jusqu'à la composante d'indice k : $x_i = \dfrac{k(n+1-i)}{n+1}$ pour $k \leqslant i \leqslant n$.

Puis :

$$x_{k-1} = \frac{1}{u_{k-1,k-1}}\Big(0 + x_k\Big) = \frac{k-1}{k} \times \frac{k(n+1-k)}{n+1} = \frac{(k-1)(n+1-k)}{n+1}$$

$$x_{k-2} = \frac{1}{u_{k-2,k-2}}\Big(0 + x_{k-1}\Big) = \frac{k-2}{k-1} \times \frac{(k-1)(n+1-k)}{n+1} = \frac{(k-2)(n+1-k)}{n+1}$$

Itération claire jusqu'à la première composante.

En conclusion la solution $A_n\mathbf{x} = \mathbf{e_k}$ est définie par :

$x_i = \dfrac{i(n+1-k)}{n+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $x_i = \dfrac{k(n+1-i)}{n+1}$ pour $k \leqslant i \leqslant n$ $\square$

Remarque : les deux "formules" donnent la même résultat pour $i = k$ de sorte qu'il n'y a pas d'erreur d'énoncé !

4. Le vecteur $\mathbf{x}$ calculé ci-dessus est la colonne numéro k de A_n^{-1}. De sorte que :

$b_{i,j} = \dfrac{i(n+1-j)}{n+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j$ et $b_{i,j} = \dfrac{j(n+1-i)}{n+1}$ pour $j \leqslant i \leqslant n$ $\square$

Partie III. Une méthode itérative.

1.

a. $\|A\mathbf{x}\|^2 = {}^t\mathbf{x}({}^tAA)\mathbf{x} \geqslant 0$ et n'est nul que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ c'est à dire $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puique A est inversible.
Ainsi ${}^tAA$ est symétrique définie positive. $\square$

b. En tant que matrice symétrique réelle, B est ortho-diagonalisable. Notons $\mathcal{B} = \Big(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}\Big)$ une base orthonormée de vecteurs propres avec e'_i associé à la valeur propre λ_i.
Il vient pour tout vecteur $\mathbf{x}$ unitaire de composantes X' dans la base orthonormée $\mathcal{B}$:
$\|A\mathbf{x}\|^2 = {}^tX'BX' = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i {x'}_i^2 \leqslant \lambda_n \sum\limits_{i=1}^{n} {x'}_i^2 = \lambda_n$ donc $\|A\| \leqslant \sqrt{\lambda_n}$.
Par ailleurs pour $\mathbf{x} = \mathbf{e'_n}$ il vient $\|A\mathbf{x}\|^2 = \lambda_n$ de sorte que $\|A\| \geqslant \sqrt{\lambda_n}$.

En conclusion$\|A\| = \sqrt{\lambda_n}$. $\square$

c. Si A est symétrique donc diagonalisable, alors $B = A^2$ donc le spectre de B est constitué des carrés des valeurs propres de A d'où $\lambda_n = \rho(A)^2$ et $\|A\| = \rho(A)$. $\square$

2. Il vient $\mathbf{U_{k+1}} - \mathbf{U_k} = H(\mathbf{U_k} - \mathbf{U_{k-1}})$ donc $\|\mathbf{U_{k+1}} - \mathbf{U_k}\| \leqslant \|H\| \times \|\mathbf{U_k} - \mathbf{U_{k-1}}\| \leqslant \ldots \leqslant \|H\|^k \times \|\mathbf{U_1} - \mathbf{U_0}\|$

ce qui prouve que la série télescopique $\sum(\mathbf{U_{k+1}} - \mathbf{U_k})$ converge absolument (car $\|H\| < 1$) donc converge puisque $\mathbb{R}^n$ est complet.
Il en découle que la suite $\big(\mathbf{U_k}\big)$ converge.
Sa limite ω vérifie $\omega = H\omega + \mathbf{c}$ par passage à la limite dans $\mathbf{U_{k+1}} = H\mathbf{U_k} + \mathbf{c}$ qui est justifié par caractérisation séquentielle de la continuité et le fait que $\mathbf{x} \longmapsto H\mathbf{x} + \mathbf{c}$ est continue.

Ainsi si $\|H\| < 1$ alors pour toute semence $\mathbf{U_0}$ la suite itérée par $\mathbf{x} \longmapsto H\mathbf{x} + \mathbf{c}$ converge vers la solution du système linéaire $(\mathrm{Id} - H)\mathbf{u} = \mathbf{c}$. $\square$

3.

a. Commençons par noter que la matrice M_n étant symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles.
λ est valeur propre si et s eulement si il existe $\mathbf{x}$ non nul tel que $M_n\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ce qui se traduit, en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, par $x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
En d'autres termes λ est valeur propre si et seulement si la récurrence linéaire ci-dessus admet une solution non nulle telle que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Recherchons a priori les éventuelles valeurs propres λ telles que $|\lambda| < 2$ c'est à dire de la forme $2\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$.
L'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$ admet alors deux racines distinctes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ de sorte que $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$.
La condition $x_0 = x_{n+1} = 0$ se traduit par le système en (α, β) : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2i\alpha \sin\big((n+1)\theta\big) = 0 \end{cases}$ qui admet une solution non nulle si et seulement si $\sin\big((n+1)\theta\big) = 0$.
On obtient donc ainsi n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_k = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et on a bien toutes les valeurs propres de M_n. $\square$

b. Comme M_n est symétrique on a, d'après la question précédente et d'après la question III.1.c,
$\|M_n\| = \rho(M_n) = 2\cos\dfrac{\pi}{n+1} = 2 - \mu_n$ avec $\mu_n = 2\Big(1 - \cos\dfrac{\pi}{n+1}\Big) = 4\sin^2\dfrac{\pi}{2(n+1)}$ $\square$

c. $\mu_n \sim \dfrac{\pi^2}{n^2}$ $\square$

4.

a. $A_n\mathbf{u} = \mathbf{w} \iff (I_n - \frac{1}{2}M_n)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{w} \iff \mathbf{u} = H\mathbf{u} + \mathbf{c}$ avec $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$
On a $\|H\| = 1 - \dfrac{\mu_n}{2} < 1$ donc la méthode itérative converge bien vers la solution $\mathbf{u}$.
Par itération évidente il vient $\mathbf{U}_k = H^k\mathbf{U_0} + \big(H^{k-1} + \cdots + H + I_n\big)\mathbf{c}$ (1) $\square$

b. On a $\mathbf{u} = (I_n - H)^{-1}\mathbf{c}$ et $(I_n - H)^{-1} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} H^p$ puisque $\|H\| < 1$ dans l'algèbre normée unitaire de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donc $\mathbf{U_k} - \mathbf{u} = H^k\mathbf{U_0} - \Big(\sum\limits_{p=k+1}^{+\infty} H^p\Big)\mathbf{c}$ soit encore $\mathbf{U_k} - \mathbf{u} = H^k\mathbf{U_0} - \Big(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} H^p\Big)H^{k+1}\mathbf{c} = H^k\mathbf{U_0} - 2A_n^{-1}H^{k+1}\mathbf{c}$

Or $\|H^k\mathbf{U_0}\| \leqslant \|H\|^k$ puique $\|U_0\| = 1$ et que la norme subordonnée à la norme quadratique est une norme d'algèbre donc que $\|H^k\| \leqslant \|H\|^k$.Donc $\|H^k\mathbf{U_0}\| \leqslant \Big(1 - \dfrac{\mu_n}{2}\Big)^k$.
De même puique $\|\mathbf{c}\| = \dfrac{\|\mathbf{w}\|}{2} = \dfrac{1}{2}$ il vient que $\|H^{k+1}\mathbf{c}\| \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{\mu_n}{2}\Big)^{k+1}$
Ainsi $\|\mathbf{U_k} - \mathbf{u}\| \leqslant \Big(1 - \dfrac{\mu_n}{2}\Big)^k\Big(1 + \|A_n^{-1}\|(1 - \dfrac{\mu_n}{2})\Big)$ $\square$

c. A_n est symtrique réelle donc son inverse également donc $\|A_n^{-1}\| = \rho(A_n^{-1})$. Or les valeurs propres de $A_n = 2I_n - M_n$ sont $2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ pour k de 1 à n.
Donc $\rho(A_n^{-1}) = \dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)} = \dfrac{1}{\mu_n} \sim \dfrac{n^2}{\pi^2}$ $\square$

d. Il en découle que $\|\mathbf{U_k} - \mathbf{u}\| \leqslant \Big(1 - \dfrac{\mu_n}{2}\Big)^k\Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mu_n}\Big)$

Pour avoir $\varepsilon_k < 10^{-4}$ il <u>suffit</u> donc que $k > \alpha_n$ avec $\alpha_n = \dfrac{-4\ln(10) - \ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mu_n})}{\ln(1 - \frac{\mu_n}{2})} \sim \dfrac{-2\ln\mu_n}{\mu_n} \sim 4\pi^2 n^2 \ln n$

Une itération exige $3n$ additions et n divisions par 2 (une telle division se traduisant d'ailleurs par un simple décalage de la mantisse).
D'où un coût asymotique en $n^3\ln n$ opérations pour la résolution approchée de ce système particulier par la méthode itérative.

Or la résolution par la factorisation LU d'un système tri-diagonal est linéaire comme vu en II.B.3. Il n'y a donc pas photo !

À moins que quelque chose m'échappe cet exemple me paraît particulièrement mal choisi pour mettre en évidence l'intérêt que peut présenter la méthode itérative pour résoudre certains systèmes.

FIN