

Partie I. Produit de deux automorphismes autoadjoints positifs.

I.A - Généralités

A.1) Un endomorphisme symétrique u de E est orthodagonalisable. Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son spectre, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres et (x_i) les composantes d'un vecteur x quelconque de E dans cette base.

Alors $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et il est ainsi immédiat que u est positif (resp. défini positif) si et seulement si $\lambda_i \geq 0$ (resp. $\lambda_i > 0$) pour tout i de 1 à n . $\square$

A.2) Si $u \in S^{++}(E)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ donc u est inversible et la matrice de u^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Comme la base est orthonormée cela prouve déjà que u^{-1} est symétrique et la question précédente prouve qu'il est défini positif. $\square$

A.3.a) On reprend les notations précédentes en notant qu'ici on a simplement $\lambda_i \geq 0$. Soit s l'endomorphisme de matrice $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, s est symétrique et il est positif d'après la première question. En outre en considérant les matrices dans la base $\mathcal{B}$ il vient que $u = s^2$. $\square$

A.3.b) Ainsi $(u(x)|x) = (s(s(x))|x) = (s(x)|s(x)) = \|s(x)\|^2$.

Donc si $(u(x)|x) = 0$ alors $s(x) = 0$ donc a fortiori $s(s(x)) = 0$ soit $u(x) = 0$. $\square$

I.B - Preuve du résultat

B.1.a) On a $(u(x)|y) = (x|u(y))$ et $(u(x)|x) \geq 0$ pour tout (x, y) de E^2 donc a fortiori pour tout $(x, y) \in (\text{Im } u)^2$ ce qui prouve déjà que u_1 est autoadjoint positif.

Par ailleurs $\text{Ker } u_1 = \text{Ker } u \cap \text{Im } u$ et comme u est autoadjoint on a $\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp = (\text{Im } u)^\perp$ donc $\text{Ker } u_1 = \{0\}$ ce qui prouve que $\text{Sp}(u_1) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et finalement que $u_1 \in S^{++}(\text{Im } u)$. $\square$

B.1.b) Notons $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\text{Im } u$ défini par u_1^{-1} et soit $(x, y) \in \text{Im } u$. Il vient :

$$\bullet \langle w(x)|y \rangle = (u_1^{-1}(w(x))|y) = (w(x)|u_1^{-1}(y)) = (u(v(x))|u_1^{-1}(y)) = (v(x)|u(u_1^{-1}(y)))$$

$$\text{Or } u \circ u_1^{-1} = u_1 \circ u_1^{-1} = \text{Id}_{\text{Im } u} \text{ Donc } \langle w(x)|y \rangle = (v(x)|y)$$

Comme v est autoadjoint, cette fonction est symétrique en x et y donc w est bien symétrique pour $\phi_{u_1^{-1}}$.

$$\bullet \text{ D'après le calcul ci-dessus, } \langle w(x)|x \rangle = (v(x)|x) \geq 0 \text{ puisque } v \text{ est positif.}$$

$$\bullet \text{ En conclusion } w \text{ est bien autoadjoint positif pour } \phi_{u_1^{-1}}. \quad \square$$

B.2) $\text{Im}(u \circ v)$ est un sous-espace de $\text{Im } u$ et la restriction de $u \circ v$ à $\text{Im } u \circ v$ n'est autre que la restriction de w .

Or w en tant qu'endomorphisme autoadjoint positif est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$ et on sait que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable (avec ses valeurs propres naturellement à choisir parmi celles de l'endomorphisme de départ).

Ainsi la restriction de $u \circ v$ à $\text{Im}(u \circ v)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$. $\square$

B.3) Soit $x \in \text{Im}(u \circ v) \cap \text{Ker}(u \circ v)$ et soit y tel que $x = u \circ v(y)$.

$$\text{On a } (v(x)|x) = (v(x)|u(v(y))) = (u(v(x))|v(y)) = (0|v(y)) = 0$$

Comme v est autoadjoint positif, on a $v(x) = 0$ d'après (1).

$$\text{Par ailleurs } (u(v(y))|v(y)) = (x|v(y)) = (v(x)|y) = (0|y) = 0$$

Donc, toujours d'après (1), $u(v(y))$ c'est à dire x est nul et la somme $\text{Im}(u \circ v) + \text{Ker}(u \circ v)$ est directe.

Le théorème du rang fournit alors la conclusion. $\square$

B.3) $\text{Im}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(u \circ v)$ sont deux sous-espaces stables par $u \circ v$ et supplémentaires. La restriction de $u \circ v$ au premier est diagonalisable avec un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$ (question B.2) ainsi bien sûr que la restriction au second avec 0 comme unique valeur propre.

Il en découle que $u \circ v$ est diagonalisable (concaténation de bases de vecteurs propres) et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.C - Cas particulier

C.1.a)• Pour y fixé dans F , l'application $x \mapsto (f(x)|y)$ est une forme linéaire sur E . Donc (isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual) il existe un unique vecteur de E noté $g(y)$ tel que $(f(x)|y) = (x|g(y))$.

$$\bullet \text{ En outre pour } (y, z) \in F^2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ on a pour tout } x \text{ de } E :$$

$$(x|g(y + \lambda z)) = (f(x)|y + \lambda z) = (f(x)|y) + \lambda(f(x)|z) = (x|g(y)) + \lambda(x|g(z)) = (x|g(y) + \lambda g(z)) \text{ donc :}$$

$$g(y + \lambda z) - g(y) - \lambda g(z) \text{ est nul car élément de } E^\perp \text{ ce qui établit la linéarité de } g. \quad \square$$

C.1.b) $y \in \text{Ker } f^*$ si et seulement si $f^*(y) = 0$ soit si et seulement si $f^*(y) \in E^\perp$ soit si et seulement si $(x|f^*(y)) = 0$ pour tout $x \in E$ soit si et seulement si $(f(x)|y) = 0$ pour tout $x \in E$ soit si et seulement si $y \in (\text{Im } f)^\perp$.
Ainsi $\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$ $\square$

C.1.c) Première démonstration :

$z_k \in \text{Im } f = (\text{Ker } f^*)^\perp$ d'après la question précédente.

Or f^* induit un isomorphisme φ de $(\text{Ker } f^*)^\perp$ sur $\text{Im } f^*$ puisque $(\text{Ker } f^*)^\perp$ est un supplémentaire de $\text{Ker } f^*$ (dimension finie).

Ainsi puisque $f^*(z_k) = \varphi(z_k)$ tend vers 0, $z_k = \varphi^{-1}(\varphi(z_k))$ tend vers $\varphi^{-1}(0) = 0$ puisque φ^{-1} est continu (dimension finie).

Ainsi si une suite (z_k) de $\text{Im } f$ est telle que la suite $(f^*(z_k))$ tend vers 0 alors la suite (z_k) converge vers 0. $\square$

Deuxième démonstration :

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormale de $\text{Im } f$ et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de E telle que $f(u_i) = e_i$. Alors :

$$z_k = \sum_{i=1}^p (e_i|z_k) e_i = \sum_{i=1}^p (u_i|f^*(z_k)) e_i \text{ d'où la conclusion car } \left| (u_i|f^*(z_k)) \right| \leq \|u_i\| \cdot \|f^*(z_k)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad \square$$

C.1.d) Pour $(x, y) \in E^2$ il vient $(x|f^* \circ f(y)) = (f(x)|f(y))$ quantité symétrique en x et y et $(x|f^* \circ f(x)) = \|f(x)\|^2$ donc $f^* \circ f \in S^+(E)$ $\square$

C.2) $a^{-1} \circ f^* \circ f = a^{-1} \circ (f^* \circ f)$ est donc le produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs d'où la conclusion d'après I.B. $\square$

C.3) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est autoadjoint positif pour le produit scalaire défini sur E par $\langle x|y \rangle = (a(x)|y)$ car

$$\langle a^{-1} \circ f^* \circ f(x)|y \rangle = (f^* \circ f(x)|y) = (f(x)|f(y))$$

Or si φ est un endomorphisme autoadjoint pour un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ il vient immédiatement en considérant une base orthodiagonalisante que $|\langle \varphi(x)|x \rangle| \leq \rho(\varphi) \times \langle x|x \rangle^2$ avec $\rho(\varphi)$ le rayon spectral de φ .

En considérant $\varphi = a^{-1} \circ f^* \circ f$ pour le produit scalaire défini précédemment on obtient l'inégalité demandée. $\square$

Partie II. Minimisation d'une fonctionnelle quadratique.

II.A - Minimisation théorique.

A.1) Soit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ le spectre de a .

En considérant une base orthodiagonalisante de a , il vient immédiatement $(a(x)|x) \geq \lambda_1 \|x\|^2$

$$\text{Comme } (b|x) \leq \|b\| \cdot \|x\| \text{ on obtient } J(x) \geq \left(\frac{\lambda_1}{2} \|x\| - \|b\| \right) \|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty \quad \square$$

A.2) Première démonstration :

En particulier il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \geq \alpha$ implique $J(x) \geq 0$.

$V \cap \overline{B}(0, \alpha)$ est un fermé borné de V espace de dimension finie donc un compact. Or J est une application continue (par continuité du produit scalaire et de a endomorphisme d'un espace de dimension finie) donc admet un minimum $J(x_0)$ sur $V \cap \overline{B}(0, \alpha)$.

Or $J(x_0) \leq 0$ car $J(x_0) \leq J(0)$ puisque $0 \in V \cap \overline{B}(0, \alpha)$.

On a donc également $J(x_0) \leq J(x)$ pour tout x tel que $\|x\| \geq \alpha$.

Finalement $J(x_0) \leq J(x)$ pour tout $x \in V$. $\square$

Deuxième démonstration :

Soit $\alpha = \inf_{x \in V} J(x)$ (a priori α éventuellement égal à $-\infty$) et soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de V minimisante c'est à dire telle que $J(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \alpha$. Cette suite est bornée d'après la question précédente donc admet une valeur d'adhérence x_0 dans V (théorème de Bolzano-Weierstrass dans V espace de dimension finie).

Alors si (y_k) avec $y_k = x_{\varphi(k)}$ est une suite extraite convergeant vers x_0 on a que la suite $(J(y_k))$ tend vers $J(x_0)$ par continuité de J et vers α en tant que suite extraite de la suite $(J(x_k))$. Ainsi $\alpha = J(x_0)$. $\square$

A.3.a) Un calcul immédiat montre que l'inégalité proposée équivaut à $(a(x+y)|x+y) < 2(a(x)|x) + 2(a(y)|y)$ c'est à dire à $(a(x-y)|x-y) > 0$ ce qui est bien vrai car a est défini positif et $x-y \neq 0$. $\square$

A.3.b) Si le minimum m était atteint en deux points distincts au moins x_0 et y_0 alors on aurait en notant z_0 le milieu de x_0 et y_0 qui appartient bien à V : $J(z_0) < \frac{m+m}{2} = m$. Contradiction. $\square$

A.4.a) Un calcul facile (en n'oubliant pas que a est symétrique) fournit :

$$J(x+th) = J(x) + (a(x)-b|h)t + \frac{1}{2}(a(h)|h)t^2 \quad \square$$

A.4.b) • Supposons $a(x_0) - b \in V^\perp$. Soit x quelconque de V différent de x_0 . Il vient en notant $h = x - x_0$:

$$J(x) = J(x_0 + h) = J(x_0) + \frac{1}{2}(a(h)|h) > J(x_0) \text{ car } a \text{ est défini positif et } h \text{ non nul.}$$

Ainsi J_V est bien minimale en x_0 en notant J_V la restriction de J à V .

• Réciproquement supposons J_V minimale en x_0 .

Fixons h quelconque non nul dans V et envisageons $\varphi : t \mapsto J(x_0 + th)$

La question précédente permet d'écrire $\varphi(t) = \varphi(0) + (a(x_0) - b|h)t + o(t)$ ce qui prouve que φ est dérivable en 0 de nombre dérivé $\varphi'(0) = (a(x_0) - b|h)$.

Mais comme J_V est minimale en x_0 , a fortiori φ est minimale en 0 donc $\varphi'(0)$ est nul.

Donc $a(x_0) - b$ est orthogonal à h et comme h est quelconque dans V on a bien $a(x_0) - b \in V^\perp$.

• En conclusion J_V est minimale en x_0 si et seulement si $a(x_0) - b \in V^\perp$. $\square$

A.5.a) Posons $x = \omega + h$ de sorte que $J(x) = J(\omega) + \frac{1}{2}(a(h)|h)$ d'après ce qui précède.

Ainsi dans le repère déduit de la base canonique par translation en prenant ω pour origine, la surface $\mathcal{E}_k$ a pour équation $(a(h)|h) = k'$ avec $k' = 2(k - J(\omega)) > 0$.

Comme a est défini positif, il s'agit donc d'un ellipsoïde de centre ω . $\square$

A.5.b) Dans ce repère $\mathcal{E}_k$ a pour équation $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = k'$ en notant λ_i les valeurs propres de a et Π admet une équation de la forme $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ avec d non nul puisque $\omega \notin \Pi$.

Ce plan est tangent à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si il existe (x_1, x_2, x_3) et α tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = k' \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ \lambda_1 x_1 = \alpha a \\ \lambda_2 x_2 = \alpha b \\ \lambda_3 x_3 = \alpha c \end{cases} \quad \text{soit si et seulement (car } \lambda_i \neq 0) \text{ il existe } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} (\frac{a^2}{\lambda_1} + \frac{b^2}{\lambda_2} + \frac{c^2}{\lambda_3})\alpha^2 = k' \\ (\frac{a^2}{\lambda_1} + \frac{b^2}{\lambda_2} + \frac{c^2}{\lambda_3})\alpha = d \end{cases}$$

Or $\lambda_i > 0$ et au moins un des trois réels a, b ou c est non nul donc $\frac{a^2}{\lambda_1} + \frac{b^2}{\lambda_2} + \frac{c^2}{\lambda_3} > 0$ de sorte que la seconde équation détermine α (non nul) et la première équation devient alors une équation de compatibilité qui n'est satisfaite que pour une valeur de k' donc pour une seule valeur de k . $\square$

A.5.c) $\mathcal{E}_k$ a pour équation $(x-1)^2 + 2y^2 + 3z^2 = k-1$. Avec la même méthode, Π est tangent à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si il existe (x, y, z, α) tel que :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2y^2 + 3z^2 = k-1 \\ x+y+z=0 \\ x-1=\alpha \\ 2y=\alpha \\ 3z=\alpha \end{cases} \quad \text{soit si et ssi il existe } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\alpha^2 = k-1 \\ \alpha = -\frac{6}{11} \end{cases} \quad \text{i.e. } k = -\frac{5}{11} \quad \square$$

II.B - Lagrangien augmenté.

B.1) Notons $\varphi = L_r(x, \cdot)$. Il vient $\varphi(p) = C^{te} + (p|f(x))$ donc φ est affine d'où la conclusion. $\square$

En détaillant :

- Si φ admet un maximum alors $f(x) = 0$ sinon $\varphi(nf(x)) = n\|f(x)\|^2$ tendrait vers $+\infty$ avec n et ainsi φ n'admettrait pas de maximum.
- Si $x \in \text{Ker } f$ alors φ est constante d'après (1).
- Si φ est constante alors elle admet évidemment un maximum.
- En conclusion les trois assertions sont bien équivalentes. $\square$

B.2) Notons $\psi = L_r(\cdot, p)$. Il vient $\psi(x) = \frac{1}{2}((a + rf^* \circ f)(x)|x) - (b - f^*(p)|x)$.

Or $a + rf^* \circ f$ est autoadjoint (somme des deux autoadjoints) et en outre défini positif car

$$((a + rf^* \circ f)(x)|x) = (a(x)|x) + r\|f(x)\|^2 \geq (a(x)|x) > 0 \text{ pour } x \neq 0$$

Ainsi ψ est une fonctionnelle quadratique du type de J et, d'après la question A.4.b), ψ est minimale en x si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) - (b - f^*(p))$ est orthogonal à E donc nul.

Ainsi ψ est minimale en x si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$. $\square$

B.3.a) Il résulte donc des deux questions précédentes que (x, p) est un point selle si et seulement si $x \in \text{Ker } f$ et $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$ soit si et seulement si $x \in \text{Ker } f$ et $a(x) + f^*(p) = b$. $\square$

B.3.b) $J|_{\text{Ker } f}$ est minimale en x si et seulement si $a(x) - b \in (\text{Ker } f)^\perp$ d'après A.4.b) soit si et seulement si $a(x) - b \in \text{Im } f^*$ d'après I.C.1.b) donc si et seulement si il existe $p \in F$ tel que $a(x) - b = f^*(-p)$.

Ainsi $J|_{\text{Ker } f}$ est minimale en x si et seulement si il existe $p \in F$ tel que $a(x) + f^*(p) = b$ et naturellement $x \in \text{Ker } f$ donc si et seulement si il existe $p \in F$ tel que (x, p) soit un point selle de L_r . $\square$

B.4.a) Soit (x, p) un point selle. On a donc $a(x) + f^*(p) = b$.

Alors (x, p') est également point selle si et seulement si $a(x) + f^*(p') = b$ soit si et seulement si $a(x) + f^*(p') = a(x) + f^*(p)$ soit si et seulement si $p' - p \in \text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$ $\square$

B.4.b) Soit (x, p) un point selle et $p = p_1 + p_2$ la décomposition de p avec $p_1 \in \text{Im } f$ et $p_2 \in (\text{Im } f)^\perp$.

Alors tout point p' tel que (x, p') soit point selle s'écrit $p + y$ avec $y \in (\text{Im } f)^\perp$.

Il en découle que $\|p'\|^2 = \|p_1\|^2 + \|p_2 + y\|^2$

Le minimum est donc atteint avec $y = -p_2$.

En conclusion il existe un point p' et un seul tel que (x, p') soit encore point selle et tel que $\|p'\|$ soit minimum : la projection orthogonale de p sur $\text{Im } f$. $\square$

Partie III. Algorithme d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

Commençons par noter que les suite (x_k) et (p_k) sont bien définies. En effet comme déjà noté $a + rf^* \circ f$ est symétrique défini positif donc inversible.

Ainsi $x_0 = (a + rf^* \circ f)^{-1}(b - f^*(p_0))$ puis $p_1 = p_0 + \gamma_0 f(x_0)$ puis $x_1 = (a + rf^* \circ f)^{-1}(b - f^*(p_1))$ puis $p_2 = \dots$ etc

A.1.a) Par définition $r_{k+1} - r_k = p_{k+1} - p_k = \gamma_k f(x_k) = \gamma_k f(x_k - x) = \gamma_k f(y_k)$ puisque $x \in \text{Ker } f$. (1) $\square$

On a par construction $(a + rf^* \circ f)(x_k) + f^*(p_k) = b$ et également $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$ puisque (x, p) est un point selle donc par différence $(a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = 0$ (2). $\square$

A.1.b) De (1) on tire $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k (r_k | f(y_k))$ (3).

Or $(r_k | f(y_k)) = (f^*(r_k) | y_k)$ et $f^*(r_k) = -(a + rf^* \circ f)(y_k)$ d'après (2).

Donc $(r_k | f(y_k)) = -(a(y_k) | y_k) - r(f^* \circ f(y_k) | y_k) = -(a(y_k) | y_k) - r \|f(y_k)\|^2$.

En remplaçant dans (3) on obtient $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k (2(a(y_k) | y_k) + (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2)$ $\square$

D'après I.C.3) on a $(a(y_k) | y_k) \geq \frac{1}{\rho} \|f(y_k)\|^2$ et par hypothèse $\alpha \leq \gamma_k \leq \beta$.

Donc $\gamma_k (2(a(y_k) | y_k) + (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2) \geq \alpha \left(\frac{2}{\rho} + (2r - \beta) \right) \|f(y_k)\|^2 = \alpha \left(2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta \right) \|f(y_k)\|^2$ $\square$

A.1.c) Par hypothèse $2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta > 0$ et $\alpha > 0$ donc $M = \alpha (2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta) > 0$ donc la suite $(\|r_k\|)$ décroît donc converge en tant que suite décroissante minorée. $\square$

De $M \|f(y_k)\|^2 \leq \|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2$ on déduit alors que la suite $(f(y_k))$ converge vers 0.

Puis de $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k (2(a(y_k) | y_k) + (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2)$ on tire

$$2(a(y_k) | y_k) = \frac{1}{\gamma_k} (\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2) - (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

car $0 < \frac{1}{\gamma_k} \leq \frac{1}{\alpha}$ et $(2r - \gamma_k)$ est bornée.

Or a est symétrique défini positif donc $(a(y_k) | y_k) = N_a(y_k)$ en désignant par N_a la norme quadratique de y_k associée au produit scalaire défini par a .

Ainsi on a bien $y_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ soit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$. $\square$

B.1.a) On a $p_{k+1} - p_k = \gamma_k f(x_k)$ par construction donc $p_{k+1} - p_k \in \text{Im } f$ donc $\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k$ et la suite $(\bar{q}_k)$ est bien constante. $\square$

B.1.b) Il en découle que $f^*(\bar{p}_k - \bar{p}) = f^*(p_k - p) = f^*(r_k) = -(a + rf^* \circ f)(y_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ puisque (y_k) tend vers 0 et que l'endomorphisme $a + rf^* \circ f$ est continu (dimension finie). $\square$

B.1.c) Ainsi $(\bar{p}_k - \bar{p})$ est une suite de $\text{Im } f$ dont l'image par f^* tend vers 0. Donc par la question I.C.1.c), cette suite tend vers 0 i. e. $\bar{p}_k$ converge vers $\bar{p}$ donc $p_k = \bar{p}_k + \bar{q}_k = \bar{p}_k + \bar{q}_0$ converge bien vers $\bar{p} + \bar{q}_0$ $\square$

B.2) Vu que $p_0 = 0$ on a $x_0 = (a + rf^* \circ f)^{-1}(b)$ donc la formule proposée est vraie pour $k = 0$.

Supposons la formule vraie jusqu'au rang $k \geq 0$. Pour établir la formule au rang $k + 1$ donc à tout rang il suffit de montrer que $\alpha_k \stackrel{\text{DEF}}{=} (\text{Id}_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f)(x_k) = x_{k+1}$

Or $\alpha_k = x_k - (a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^*(p_{k+1} - p_k)$ car $p_{k+1} - p_k = \gamma f(x_k)$

Par ailleurs $p_{k+1} - p_k = r_{k+1} - r_k$ et $(a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = 0$ (III.A.1.a)

donc $(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^*(r_k) = -y_k$ donc $\alpha_k = x_k + y_{k+1} - y_k = x_{k+1}$ $\square$

B.3.a) Notons A la matrice de $f^* \circ f$ dans la base canonique de E . Il vient $a_{i,j} = (f^* \circ f(e_j)|e_i) = (f(e_j)|f(e_i))$
 Or par définition $f(e_i) = e_i$ si $i \leq m$ et $f(e_i) = 0$ sinon. Il en découle que $A = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Il en résulte que la matrice de $\varphi = (a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ dans la base canonique est :

$$D = \text{diag}\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r}, \dots, 1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r}, 1, \dots, 1\right)$$

Cette matrice étant symétrique et la base canonique orthonormée, l'endomorphisme φ est bien autoadjoint. $\square$

Compte-tenu de la matrice de f dans la base canonique, on a $\text{Ker } f = \text{vect}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ (en effet cette matrice est de rang m et ce sous-espace est inclus dans $\text{Ker } f$ et est de dimension $n - m = \dim \text{Ker } f$ par le théorème du rang). Comme la base canonique est orthonormée on a donc $(\text{Ker } f)^\perp = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_m)$.

La matrice D de φ dans cette base étant diagonale, les deux sous-espaces $\text{Ker } f$ et $(\text{Ker } f)^\perp$ sont évidemment stables par φ . $\square$

B.3.b) Vu ce qui précède la matrice de la restriction ψ de $\text{Id}_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ à $(\text{Ker } f)^\perp$ est $\text{diag}\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r}, \dots, 1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r}\right)$. La norme subordonnée d'un endomorphisme autoadjoint étant son rayon spectral,

$$\text{on a donc } \|\psi\| = \max\left(\left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r}\right|, \dots, \left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r}\right|\right)$$

Or la suite (λ_i) est décroissante positive donc la suite $\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_i + r}\right)$ est décroissante également donc finalement

$$\|\psi\| = \max\left(\left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r}\right|, \left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r}\right|\right) \quad \square$$

B.3.c) On a donc
$$\begin{cases} -\varepsilon \leq 1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r} \leq \varepsilon \\ -\varepsilon \leq 1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r} \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leq \gamma \leq (1 + \varepsilon)(\lambda_1 + r) \\ (1 - \varepsilon)(\lambda_m + r) \leq \gamma \leq (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r) \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$(1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leq \gamma \leq (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r) \quad (1)$$

Ainsi ε vérifie $(1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leq (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r)$ donc $\varepsilon \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r}$.

Ainsi la plus petite valeur possible de ε est $\frac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r}$ et est obtenue lorsqu'il y a égalité dans (1) donc pour

$$\gamma = \frac{2(\lambda_1 + r)(\lambda_m + r)}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r} \quad \square$$

B.3.c) Plus r est grand, plus ε est petit donc plus la suite (ψ^k) tend vite vers 0 donc plus la convergence de la suite (x_k) est rapide car, compte tenu de III.B.2), $\|x - x_k\| \leq \varepsilon^k \|x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b)\| \quad \square$

B.4.a) La matrice A de a dans une base orthonormée étant symétrique, a est bien autoadjoint.

En outre $(ax|x) = {}^t X A X = \sum_{i=1}^n i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n (i-1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=2}^n (i-1) x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geq 0$ et

$(ax|x) = 0$ implique $x_1 = 0$ pour $i \geq 2$ et $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ donc $x = 0$.

Ainsi a est bien défini positif. $\square$

B.4.b) F est la matrice $m \times n$ bloc $(\tilde{F}|0)$ où $\tilde{F}$ est la matrice carrée $m \times m$ dont tous les coefficients sont nuls sauf l'antidiagonale composée de 1 et 0 la matrice $m \times (n - m)$ nulle.

Donc ${}^t F F$ est la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le bloc $m \times m$ haut-gauche qui vaut ${}^t \tilde{F} \tilde{F} = \tilde{F} \tilde{F} = \text{Id}_m$.

Ainsi la matrice de $f^* \circ f$ est comme précédemment $D = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

Celle de $a + rf^* \circ f$ est donc N avec $n_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $n_{i,i} = i + r$ si $i \leq m$ et $n_{i,i} = i$ sinon.

D'où l'algorithme :

```
Entrer B
Entrer D
Entrer N
M ← N-1
P ← In - 2rMD
X ← MB
Pour i de 1 à k faire
    X ← PX
Fin pour
X
```

FIN