CCP MP I - année 2000

I CU dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

1) $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n+p}) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et p quelconque par hypothèse. Donc la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy pour tout x, dans $\mathbb{R}$ complet, donc converge.
la convergence simple ?

2) Une suite de Cauchy est bornée, donc on peut écrire $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n+p}) \leq M$ avec un majorant M indépendant de x, p, n. Faisons tendre p vers ∞ ci-dessus, cela donne par passage à la limite d'inégalités larges $|f_n(x) - f(x)| \leq M$; donc f est bornée comme somme d'applications bornées puisque $f = (f - f_n) + f_n$.
Enfin on a dit que si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall x \in [0,1], \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$$

Faisons encore $p \to +\infty$: par passage à la limite d'inégalités larges il vient pour tout $x \in [0,1]$ $|f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon$ ie $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. (on n'avait pas le droit d'écrire ceci avant !).

3) Il ne reste plus qu'à voir si f est dans le même espace, ie si f est continue: or c'est du cours (le reste aussi), ie une limite uniforme d'applications continues est continue.
Redémontrons-le:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \leq 2\mathcal{N}_\infty(f - f_n) + |f_n(x) - f_n(a)|$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, soit n fixé tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leq \varepsilon/3$. Par continuité de f_n, il existe un voisinage de a dans lequel $|f_n(x) - f_n(a)| \leq \varepsilon/3$. On a dans le même voisinage $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ ce qui prouve la continuité de f en a: c'est vrai pour tout a, cqfd.

4) La limite simple de (u_n) est la fonction u définie par $\begin{cases} u(x) = e^0 = 1 \text{ si } x < 1 \\ u(1) = e^1 = 1 \end{cases}$. Cette fonction étant discontinue, d'après ce qui précède la suite (u_n) qui est dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ ne peut être de Cauchy.

5)) Par le théorème de convergence monotone (puisque (u_n) est une suite décroissante d'applications continues, de limite continue par morceaux, la suite (v_n) converge bien vers la fonction $v : x \mapsto x = \int_0^x u$.
La convergence est uniforme, car on peut majorer (croissance de la fonction) $e^{t^n} - 1$ par $e^{x^n} - 1$ si $0 \leq t \leq x$. Or

$$0 \leq v_n(x) - x = \int_0^x (e^{t^n} - 1)\, dt \leq x.(e^{x^n} - 1) \leq e^{x^n} - 1$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné et posons $a = 1 - \dfrac{\varepsilon}{e-1}$: Pour $x \leq a$ on a

$$\int_0^x (e^{t^n} - 1)\, dt \leq \int_0^a (e^{t^n} - 1)\, dt \leq e^{a^n} - 1$$

et ceci est majoré par ε pour n assez grand. Pour $x > a$ on a

$$\int_a^x (e^{t^n} - 1)\, dt \leq \int_a^x (e-1) \leq (x-a)(e-1) \leq (1-a)(e-1) = \varepsilon \text{ et } \int_0^x = \int_0^a + \int_a^x \leq \varepsilon + \varepsilon$$

On a donc dans le pire des cas, et indépendamment de x, $0 \leq v_n(x) - x \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand ie $\mathcal{N}_\infty(v_n - v) \leq 2\varepsilon$, cqfd.

II Thm du point fixe

1) On a $\|x - y\| \leq \alpha\|x - y\|$ d'où $(1-\alpha)\|x - y\| \leq 0$ d'où $\|x - y\| \leq 0$ ce qui exige que $x = y$.

2.1) $\|a_{n+1} - a_n\| = \|T(a_n) - T(a_{n-1})\| \leq \alpha\|a_n - a_{n-1}\| \leq \ldots \leq \alpha^n\|a_1 - a_0\|$ de proche en proche (ou par une récurrence évidente).

$$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_{n+p} - a_{n+p-1}\| + \|a_{n+p-1} - a_{n+p-2}\| + \ldots + \|a_{n+1} - a_n\| \leq \big(\alpha^{n+p-1} + \ldots + \alpha^n\big)\|a_1 - a_0\|$$

en utilisant l'inégalité précédente.

2.2) $\alpha^{n+p-1} + \ldots + \alpha^n \leq \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) = \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \to 0$ quand $n\ to {+\infty}$, indépendamment de p. Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, dans la partie A qui est complète puisque fermée dans un Banach: celle converge vers un élément $\aleph$ de A.

2.3) Passant à la limite dans $a_{n+1} = f(a_n)$ on trouve (par continuité de f lipschitzienne) $\aleph = f(\aleph)$ ce qui contraint $\aleph$ à être fixe par f; mais il ne peut y avoir deux points fixes distincts par **II.1**, donc le théorème est établi.

3.1) Le point délicat est la bijectivité ! (T est continue) L'injectivité ne serait pas très difficile, mais faisons d'une pierre deux coups en exhibant l'inverse de U:
si l'on cherche un antécédent par U de $y \in E$, on a successivement

$$x = y - T(x) = y - T(y - T(x)) = y - T(y - T(y - T(x))) = \ldots = b_n$$

où $b_0 = y,\ b_{n+1} = y - T(y)$.
On va donc chercher x comme point fixe de la fonction $S : u \mapsto y - T(u)$. Or cette application est contractante, car $S(u) - S(v) = T(v) - T(u)$. Donc le théorème du point fixe s'applique, S possède un unique point fixe qui est le x cherché.

3.2) Soit $x = U(x') = x' + T(x')$ et $y = U(y') = y' + T(y')$: on a

$$\|x - y\| = \|x' - y' + T(x') - T(y')\| \geq \|x' - y'\| - \|T(x') - T(y')\| \geq \|x' - y'\| - \alpha\|x' - y'\|$$

puisque $\|T(x') - T(y')\| \leq \alpha\|x' - y'\|$: ce qui prouve ce que l'on demande, ie

$$\|x' - y'\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|x - y\|$$

4.1) Par linéarité de V: $\|V(x) - V(y)\| = \|V(x - y)\| \leq \|V\|.\|x - y\|$ et donc V est contractante.

4.2) Question délicate. Remarquons que, d'une part, l'hypothèse $\|V\| > 1$ n'est pas superfétatoire, et d'autre part, que $\|V_n\| \to \|V\|$ (continuité de la norme). En particulier on a (à partir d'un certain rang, pour un certain $\alpha \in]\|V\|, 1[$)

$$\boxed{\|V_n\| \leq \alpha < 1 \text{ d'où } \|(I + V_n)^{-1}\| \leq (1-\alpha)^{-1} \text{ par } \mathbf{3.2}}$$

Par ailleurs, $y = x_n + V_n(x_n) = x + V(x)$ d'où

$$x_n - x = V(x) - V_n(x_n) = \big(V(x) - V_n(x)\big) - \big(V_n(x_n) - V_n(x)\big)$$

On en tire (par linéarité de V_n) $(I + V_n)(x_n - x) = V(x) - V_n(x)$ d'où

$$\|x_n - x\| = \|(I + V_n)^{-1} \circ (V - V_n)(x)\| \leq \frac{\|V - V_n\|.\|x\|}{1-\alpha} \to 0$$

III Etude d'une transformation de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

1) On applique le théorème (ou l'inégalité) des accroissements finis à une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\wp : z \mapsto \Psi(x, y, z)$ (l'application partielle, x et y sont fixés).
Comme $\wp'(z) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial z}(x, y, z)$ est bornée par M en valeur absolue, on a bien
$|\wp(z') - \wp(z)| \leq M.|z' - z|$, ce qui prouve que φ est de type $\mathcal{U}$.

2.1) Une composée d'applications continues est continue. L'application proposée est bien définie, et continue.

2.2) En effet, $x \mapsto \int_0^1 \varphi\big(x, y, u(y)\big)\, dy$ définit bien une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on peut dénoter $T_\varphi(u)$. D'après les théorèmes sur les intégrales sur un segment fixé dépendant d'un paramètre, $T_\varphi(u)$ est continue dès que u l'est (puisqu'alors l'intégrande est fonction continue du couple (x, y)).

2.3) Cherchons une majoration indépendante de x:

$$|T_\varphi(u_1)(x) - T_\varphi(u_2)(x)| = \left|\int_0^1 \varphi\big(x, y, u_1(y)\big) - \varphi\big(x, y, u_2(y)\big)\, dy\right|$$

$$\leq \int_0^1 \Big|\varphi\big(x, y, u_1(y)\big) - \varphi\big(x, y, u_2(y)\big)\Big|\, dy \leq \int_0^1 r|u_1(y) - u_2(y)|\, dy \leq r\, \mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2)$$

Cette majoration étant uniforme, on a bien $\mathcal{N}_\infty\big(T_\varphi(u_1)(x) - T_\varphi(u_2)(x)\big) \leq r\, \mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2)$. L'application T_φ est donc lipschitzienne.

2.4) L'hypothèse sur λ signifie que λT_φ est contractante, par application de la partie précédente on en déduit que $\mathcal{S}_{(\varphi,\lambda)}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dans lui-même (avec $\mathcal{N}_\infty$).

3.1) μ est continue sur un compact (carré), donc y est majorée: posons $r = \sup|\mu|$, alors immédiatement on voit que φ est de type $\mathcal{U}$. La fin de la question est l'application de la précédente.

3.2) Les T_φ et autres travaillent sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Considérons $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\Big\|\big(T_{\varphi_n}(u) - T_\varphi(u)\big)(x)\Big\| = \Big|\int_0^1 \big(\mu_n(x, y) - \mu(x, y)\big)\, u(y)\, dy\Big| \leq \mathcal{N}_\infty(\mu_n - \mu).\mathcal{N}_\infty(u)$$

On en tire $\mathcal{N}_\infty(T_{\varphi_n} - T_\varphi) \leq \mathcal{N}_\infty(\mu_n - \mu)$ par définition d'une norme subordonnée.
Or cette dernière quantité tend vers 0 par hypothèse, donc T_{φ_n} tend vers T_φ pour la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}))$, cqfd.

IV. Etude d'une application

L'opérateur T_φ est contractant, où $\varphi(x, y, z) = \sin(xy)z$ (ie $\mu(x, y) = \sin(xy)$), car $\mathcal{N}_\infty(\mu) = \sin 1 < 1$ (cf. **III.2** notamment). Par le **II** on en déduit que $I + T_\varphi$ possède un, et un seul, point fixe dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

2) Il n'est pas interdit de remarquer que $v_n(x,y) \to \sin xy$ et ce uniformément sur $[0,1]^2$.

2.1) $(E_1) : w_1(x) = x + \int_0^1 xy\ w(y)\ dy = x\Big(1 + \int_0^1 y\ w_1(y)\ dy\Big)$.

On peut invoquer des raisons similaires pour justifier existence et unicité d'une solution.

Donc si w_1 est solution alors $w_1(x) = \lambda x$ avec

$$\lambda x = x + \int_0^1 x\lambda y^2\ dy = x(1 + \frac{\lambda}{3}) \qquad \text{d'où } \lambda = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad w_1(x) = \frac{3x}{2}$$

2.2) est contractante

Similairement, il est nécessaire que w_n soit un polynôme impair de degré $2n-1$:

$$w_n(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1} = x(1 + \int_0^1 y\ w(y)\ dy) + \sum_{i=2}^{n} x^{2i-1} \int_0^1 \frac{(-1)^i y^{2i-1}}{(2i-1)!} w_n(y)\ dy$$

et par identification des coefficients il vient

$$a_1 = 1 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 a_{2j-1}\ y^{2j}\ dy = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{2j-1}}{2j+1} \qquad \text{et pour } i > 1 \ldots$$

$$a_{2i-1} = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 a_{2j-1}\ y^{2i+2j-2}\ dy = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{2j-1}}{2i+2j-1}$$

On n'essaiera pas de résoudre ce système !

Il vient à l'ordinateur $w_2(x) = \frac{3225\,x}{2171} - \frac{105\,x^3}{2171}$, $w_3[x] = \frac{8441757975x}{5681443343} - \frac{275025240x^3}{5681443343} + \frac{9802485x^5}{5681443343} \ldots$ et le graphe montre bien la CUniforme (sur tout compact ?):

2.3) Tout d'abord, on peut remarquer que la série de somme partielle v_n vérifie sur $[0,1]^2$ le critère des séries alternées: en effet $\dfrac{(xy)^{2i-1}}{(2i-1)!}$ décroît vers 0. On a en conséquence les sous-suites paires et impaires qui sont adjacentes, de limite commune (qui est $\sin xy$ comme on le sait). En particulier v_n est coïncée entre v_2 et v_3 pour $n \geq 2$:

$$0 \leq xy - \frac{x^3y^3}{6} \leq v_n(x,y) \leq xy - \frac{x^3y^3}{6} xy + \frac{x^5y^5}{120}$$

d'où $\mathcal{N}_\infty(v_n) \geq \mathcal{N}_\infty(v_2) = \frac{5}{6}$. Ce qui prouve que l'on peut prendre $\lambda = -1$ dans la partie **III.3**.

On a donc une et une seule solution donnée par le théorème du point fixe comme au **II**.

2.4) La convergence de v_n vers sin est uniforme sur $[0,1]^2$ – soit en considérant qu'il s'agit d'une série entière en la variable xy, laquelle reste dans un compact du disque de convergence, soit en utilisant le théorème des séries alternées comme à la question précédente mais pour majorer le reste de la série.

Cela signifie que $\mathcal{N}_\infty(v_n - v) \to 0$, comme au **3.3.2**.

On a donc convergence de la suite des opérateurs de Fredholm associés pour la norme d'opérateur de leur abominable espace ! Il est (enfin) temps d'appliquer la question **II.4.2** qui montre que l'on a alors convergence (ie convergence uniforme en l'occurence) de la suite des points fixes des $V_n = S_{\varphi_n,1}$ où $\varphi_n(x,y,z) = v_n(x,y)z$ comme au **III.3**.

Ce qui signifie bien que $w_n \to w$ uniformément sur $[0,1]$.