CCP - 2017 - PSI

PROBLÈME 1 (algèbre)

Partie I – Un exemple en dimension 2

Q1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det(XI_2 - A) = X^2 + t^2$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-it, it\}$.

Q2. Si B est une matrice inversible, alors B^{-1} est un polynôme en B. Ainsi, $(I_2 - A)^{-1}$ est un polynôme en $I_2 - A$, donc en A par $A^2 = -t^2 I_2$. Il s'ensuit que R est aussi un polynôme en A, donc une combinaison de I_2 et de A (dimension 2). Alors,

$$R = \alpha I_2 + \beta A \iff I_2 + A = (\alpha I_2 + \beta A)(I_2 - A) = (\alpha + \beta t^2) I_2 + (\beta - \alpha) A.$$

Si $t \neq 0$, on peut identifier, ce qui donne un systéme linéaire de deux équations à deux inconnues, d'où

$$R = \frac{1-t^2}{1+t^2} I_2 + \frac{2t}{1+t^2} A = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

et la formule est triviale pour $t = 0$. On vérifie immédiatement que $C_1(R) \perp C_2(R)$ et l'on calcule $\|C_1(R)\|^2 = \|C_2(R)\|^2 = 1$. Comme $\det R = \dfrac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$, on a bien $R \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Q3. La matrice R_θ est la matrice en B.O.N.D. de la rotation d'angle θ, mais il ne semble pas immédiat d'utiliser cette information géométrique. C'est aussi la matrice générique de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. Menons pour changer un calcul direct (cette méthode était aussi valable pour la question **??**) :

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} (I_2 + R_{-\theta}) \quad \therefore$$

$$M = (I_2 + R_\theta)^{-1}(I_2 - R_\theta) = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} (I_2 + R_{-\theta})(I_2 - R_\theta) = \frac{1}{2(1+\cos\theta)} (R_{-\theta} - R_\theta)$$

$$= \frac{1}{1+\cos\theta} \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tan(\theta/2) \\ -\tan(\theta/2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II – Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Q4. Si $C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et si $BC = CB$, en multipliant à droite et à gauche par C^{-1}, il vient $C^{-1}B = BC^{-1}$.

Q5. La preuve est très similaire à celle qui montre que les matrices symétriques réelles sont à spectre réel. Si X est un vecteur colonne, on note $\overline{X}$, le vecteur colonne dont les coordonnées sont les conjuguées de celles de X. En notant X^T le vecteur ligne transposé de X, on calcule alors $\overline{X}^T X = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2$. En particulier, $\overline{X}^T X = 0$ si, et seulement si, $X = 0$. $\overline{X}^T X$ est l'analogue sur $\mathbb{C}$ de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}$. C'est pourquoi on notera (un peu, mais pas vraiment) abusivement $\|X\| = \big(\overline{X}^T X\big)^{1/2} = \big(X^T \overline{X}\big)^{1/2}$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé, donc tel que $AX = \lambda X$. Alors,

$$(AX)^T \overline{X} = \begin{cases} X^T A^T \overline{X} = -X^T A \overline{X} = -X^T \overline{AX} = -\overline{\lambda} \|X\|^2 \\ (AX)^T \overline{X} = \lambda X^T \overline{X} = \lambda \|X\|^2. \end{cases}$$

Comme X est non nul, on peut simplifier par $\|X\|^2 \neq 0$ et l'on obtient $\lambda = -\overline{\lambda}$, soit $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Q6. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. D'après la question **??**, $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, donc $I_n + A$ est inversible. La question Q**??** assure alors que $(I_n + A)^{-1}$ et $I_n - A$ commutent. Posons $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Alors, $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car

$$R^T = (I_n - A)^T \big((I_n + A)^{-1}\big)^T = (I_n^T - A^T)\big((I_n + A)^T\big)^{-1} = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} = \big((I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big)^{-1} = R^{-1}.$$

Q7. Par multiplicativité du déterminant, $\det R = \dfrac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$. Comme A est à coefficients réels, la question Q**??** permet de décrire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ comme suit : 0 est valeur propre d'ordre $k \in \mathbb{N}$ et il existe des réels strictement positifs $\lambda_i, \ldots, \lambda_p$ distincts ou non tels que les valeurs propres non nulles de A soient $\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_p$. Par symétrie du spectre de A par rapport à 0, $\chi_{I_n - A} = \chi_{I_n + A}$, d'où $\det(I_n - A) = \det(I_n + A) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (1 + \lambda_k^2)$ et l'on a donc $\det R = 1$, soit $R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Q8. Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + R$ soit inversible. On pose $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R) = (I_n - R)(I_n + R)^{-1}$ par Q**??**. Alors, $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ car

$$A^T = (I_n - R)^T\big((I_n + R)^{-1}\big)^T = (I_n - R^{-1})(I_n + R^T)^{-1} = (R - I_n)R^{-1}\big(I_n + R^{-1}\big)^{-1}$$
$$= (R - I_n)\big((I_n + R^{-1})R\big)^{-1} = -(I_n - R)(I_n + R)^{-1} = -A.$$

Q9. Soit $\phi\colon M \longmapsto (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$ l'application définie sur l'ensemble des matrices carrées dont -1 n'est pas valeur propre.

Revenons pour commencer au cas $n = 2$. En posant $t = \tan(\theta/2)$, la question Q**??** montre que, pour $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, $\phi(A(t)) = R_\theta$ (car $(I_2 + A(t))(I_2 - A(t))^{-1} = \phi(A(-t))$ il semble probable que cette complication inutile de l'énoncé ne soit pas volontaire). Cela montre que ϕ est surjective de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale par blocs, la transformation ϕ agit sur les blocs diagonaux M_k de M par la même formule, $\phi(M)$ étant la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont les $\phi(M_k)$. En particulier,

$$\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan(\theta/2) \\ 0 & -\tan(\theta/2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En dimension supérieure ou égale à 3, il faut encore pouvoir changer de base. Or,

$$\phi(P^{-1}AP) = (I_n + P^{-1}AP)^{-1}(I_n - P^{-1}AP) = \big[P^{-1}(I_n + A)P\big]^{-1}P^{-1}(I_n - A)P = P^{-1}\phi(A)P.$$

Ce n'est pas demandé, mais le résultat s'étend à la dimension n, où ϕ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales dont -1 n'est pas valeur propre. Cela peut se voir en utilisant la réduction (hors programme) des isométries en dimension quelconque, ou en utilisant les questions Q**??**, Q**??** et Q**??** et en remarquant que $\phi \circ \phi(M) = M$ pour toute matrice M dont -1 n'est pas valeur propre. De fait,

$$I_n - M = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}(I_n + M) \quad \therefore \quad I_n - (I_n - M)(I_n + M)^{-1} = (I_n + (I_n - M)(I_n + M)^{-1})M.$$

Cette démonstration générale est plutôt plus simple que celle utilisant la partie I.

PROBLÈME 2 (analyse)

Partie I – Résultats préliminaires

Q10. Une intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad \therefore$$
$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Q11. Si l'on note Φ la primitive de φ s'annulant en 0, alors $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\Phi(x + 2\pi) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\underset{u=t-2\pi}{=} 0 + \int_0^x \varphi(u + 2\pi)\,\mathrm{d}u \underset{2\pi-\text{per.}}{=} \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(x).$$

Par ailleurs, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue, et toute fonction continue périodique est bornée (sa borne supérieure sur $\mathbb{R}$ est celle de sa restriction au fermé-borné $[0, 2\pi]$), donc Φ est bornée.

En utilisant, comme à la question précédente, une intégration par parties en notant, pour toute fonction continue h, $\|h\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$ et $\|h\|_1 = \displaystyle\int_a^b |h(t)|\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\Phi(nt)}{n}f(t)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \Phi(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \therefore$$
$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\|\Phi\|_\infty\left(|f(a)| + |f(b)| + \|f'\|_1\right)}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Q12. On utilise la linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire en partant de la décomposition classique $h = g + (h - g)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_\alpha^\beta (h(t)-g(t))\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \int_\alpha^\beta |h(t)-g(t)||\varphi(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon(\beta-\alpha)\left\|\varphi\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Pour en déduire la généralisation du résultat démontré à la question Q**??** aux fonctions continues sur un segment arbitraire, il faut raisonner précisément sur la définition de la limite : soit $\varepsilon_0 > 0$ (ce ε_0 est celui intervenant dans la définition de la limite, le symbole ε ayant été choisi par l'énoncé pour désigner $\left\|h-g\right\|_\infty$). En vertu du théorème de Stone-Weierstraß, il existe une fonction polynomiale (donc de classe $\mathcal{C}^1$) g définie sur $[\alpha,\,\beta]$ et à valeurs réelles telle que $\left\|h-g\right\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2(\beta-\alpha)\left\|\varphi\right\|_\infty} = \varepsilon$. La question Q**??** assure de son côté qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. Alors, pour ces mêmes valeurs de n, la majoration ci-dessus donne

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left\|\varphi\right\|_\infty(\beta-\alpha)\frac{\varepsilon_0}{2(\beta-\alpha)\left\|\varphi\right\|_\infty} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

ce qui, par définition de la limite, montre bien que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Enfin, on passe des fonctions continues aux fonctions continues par morceaux en découpant l'intégrale selon les points x_i de discontinuité de f, en remplaçant $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ par le prolongement par continuité de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i,\,x_{i+1}]$ et en utilisant la relation de Chasles.

Q13. La formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ donne, avec la question précédente,

$$\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

la fonction cosinus étant bien continue, 2π-périodique et d'intégrale nulle sur sa période (hypothèses sur φ).

Partie II – L'intégrale de Dirichlet

Q14. Comme primitive, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc c.p.m. sur $[a, +\infty[$. Son caractère borné donne $F(t)t^{-2} = \mathcal{O}\left(t^{-2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, d'où la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ par le théorème de comparaison et la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ $(2 > 1)$. Pour étudier la nature de la deuxième intégrale, on réalise une intégration par parties :

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^{t\to+\infty} + \int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'existence de la limite (finie) dans le crochet donne à la fois la convergence de l'intégrale de départ, celle-ci étant de même nature que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité numérique.

Q15. On applique le résultat de la question **??** à $f(t) = \sin t$. Il vient, pour tout $a > 0$,

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1-\cos a}{a} \underset{t=2u}{=} \int_{2a}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{1-\cos a}{a}.$$

En faisant tendre a vers 0, il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

l'existence de la limite étant due au fait que les intégrales sont faussement impropres en 0, la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ admettant une limite finie 1, pour être précis quand t tend vers 0.

Q16. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre, dont les hypothèses sont bien vérifiées, et qui donne l'existence et la continuité de la fonction $\mathcal{L}(f)$, dite *transformée de Laplace* de f :
i) la fonction $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (p.m.) sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;
ii) la fonction $x \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
iii) pour tout couple $(t, x) \in \mathbb{R}_+^2$, on a la domination $|f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant |f(t)|$, fonction intégrable par hypothèse.

Q17. On a déjà vu que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il est immédiat qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à x. On calcule $\dfrac{\partial}{\partial^n x}\left(f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right) = (-1)^n t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}$, fonction continue par rapport à t.

Enfin, si $a > 0$, elle est dominée pour $x \in [a, +\infty[$ par la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-at}$, qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Ainsi, la fonction $t \mapsto f(t)t^n\mathrm{e}^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(f(t))$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ par le théorème des gendarmes.

Q18. 1. La question Q**??** ne montre pas seulement que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, mais aussi que ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous l'intégrale. En particulier, pour $f(t) = (1 + t^2)^{-1}$,

$$\mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

2. Cette question présente la méthode de *variation des constantes*, qui étend aux E.D.L. d'ordre 2 celle que l'on connaît pour les E.D.L. d'ordre 1. Pour $y = \alpha\cos + \beta\sin$, ce que l'on suppose dans la suite, on calcule $y'' + y = \alpha''\cos + \beta''\sin + 2(\beta'\cos - \alpha'\sin) - (\alpha\cos + \beta\sin)$. Alors,

$$\begin{cases} y'' + y = 1/x & (1) \\ \alpha'\cos + \beta'\sin = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} \beta'\cos - \alpha'\sin = 1/x & (3) = (1) - (2)' \\ \alpha'\cos + \beta'\sin = 0. & (2) \end{cases}$$

On a bien une équivalence et pas seulement une implication car $(1) = (3) + (2)'$. Le système est de Cramer et se résout en $\alpha'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ et $\beta'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. En choisissant la primitive de limite nulle en $+\infty$, il vient

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Il faut encore justifier la convergence des intégrales. La première a été traitée à la question Q**??** corrélativement à Q**??**. La deuxième est obtenue de manière similaire en appliquant la question Q**??** avec $f = \cos$.

3. Le raisonnement précédent procédant par équivalences, on a bien trouvé une solution particulière de (**E**) valant

$$\begin{aligned}\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin t\cos x - \cos x \sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

4. L'équation homogène $y'' + y = 0$ ayant pour ensemble de solutions $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, celui de (**E**) est l'ensemble auquel appartient $\mathcal{L}(f)$ des fonctions de la forme

$$x \longmapsto a\cos x + b\sin x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

Q19. On ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée faute de domination intégrable car $\dfrac{\sin t}{t}$ ne l'est pas. Cela s'arrange par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos t}{(t+x)^2} = 0$ et $\left|\dfrac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(t+1)^2}$ dès que $x \geqslant 1$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui permet d'appliquer cette fois le théorème de convergence dominée, la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème des gendarmes : pour toute suite $(x_n)_n$ de réels positifs de limite $+\infty$,

$$\forall (x_n)_n \text{ t.q. } \lim x_n = 0\colon \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x_n)^2}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la question Q**??**, $\mathcal{L}(f)(x)$ tend aussi vers 0 en l'infini. Or, $a\cos x + b\sin x$ peut se mettre sous la forme $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\varphi)$ et n'admet donc de limite quand x tend vers l'infini que si $a = b = 0$. On a donc bien $\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

Q20. Notons $\Delta(x) = -\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{x+t} - \frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t = x\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique sur $\mathbb{R}_+$ grâce à la domination $\left|\frac{\sin t}{t(t+x)}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ (les autres hypothèses, dont on a dressé la liste à la question **??**, étant trivialement vérifiées). En particulier, la continuité en 0 donne

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique également à $x \longmapsto \int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ par la domination $0 \leqslant \frac{\sin t}{x+t} \leqslant \frac{\sin t}{t}$, fonction intégrable sur $[0,1]$, ce qui permet de conclure par la relation de Chasles :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Notons que l'on pouvait aussi dominer $\frac{x\sin t}{t(t+x)}$ par $\mathbb{1}_{[0,1]} + \frac{\mathbb{1}_{]1,+\infty]}}{t^2}$ pour $(x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}_+^*$ et utiliser en une fois le théorème de continuité des intégrales à paramètre, mais ce n'est pas très différent de la solution proposée.

Q21. En combinant les expressions de $\mathcal{L}(f)$ des questions Q**??** (valable sur $\mathbb{R}_+$) et Q**??**.4 (valable sur $\mathbb{R}_+^*$) et le résultat de la question Q**??**, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f)(0) &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{Q??})\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Q??.})\end{aligned}$$

Partie III – Le phénomène de Gibbs

Q22. Par linéarité de la dérivation,

$$S_n(x) = S_n(x) - S_n(0) = \int_0^x S_n'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^x\sum_{k=0}^n \cos((2k+1)t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin((2n+2)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

après que le début du calcul a suggéré de calculer

$$\sum_{k=0}^n 2\cos((2k+1)t)\sin t = \sum_{k=0}^n\big[\sin((2k+2)t) - \sin(2kt)\big] = \sin((2n+2)t).$$

Q23. On calcule une somme géométrique, que l'on intègre sur le segment $[0,1]$:

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \qquad \therefore$$

$$\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On majore $0 \leqslant \int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+1}$. Le théorème des gendarmes donne alors la convergence et la valeur de la série : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Q24. Par définition de S_n,

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^n\frac{\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Q25. De $\sin((2k+1)(\pi-x)) = \sin((2k+1)\pi-(2k+1)x) = \sin x$, on tire $S_n(\pi-x) = S_n(x)$.

Soit $x \in]0,\pi/2]$. D'après la question Q**??**,

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^{\pi/2}\frac{\sin((2n+2)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\dfrac{1}{\sin t}$ est continue sur $[x,\pi/2]$ car le sinus ne s'y annule pas. On peut alors appliquer la question **??**, qui permet de conclure avec la question Q**??** : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Q26. La question **??** montre la convergence simple de la suite $(S_n)_n$ sur $]0,\pi/2]$. La convergence s'étend, dans l'ordre, à $]0,\pi[$ par la propriété $S_n(\pi-x)=S_n(x)$, à $[0,\pi]$ (la suite est nulle pour $x=0$ et $x=\pi$), à $[-\pi,\pi[$ par imparité et à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Q27. L'équivalent $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ appliqué à $u=\dfrac{x}{2n}$ donne la convergence simple de $(\varphi_n)_n$ vers φ sur $]0,\pi]$; le cas $x=0$ est trivial.

Q28. Le même équivalent assure la continuité de φ en 0, donc sur $[0,\pi/2]$. Il s'ensuit que φ est bornée sur le segment $[0,\pi]$ et $\varphi_n(x)-\varphi(x)=\varphi(x)\left(\dfrac{1}{\varphi(x/2n)}-1\right)$ tend uniformément vers 0 sur $[0,\pi]$. Alors,

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \underset{\text{Q??}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/(2n+2)} \frac{\sin((2(n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \underset{x=2(n+1)t}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'expression ci-dessus et la question Q**??** donnent

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right] = 1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Q29. Le sinus se développe en série entière avec un rayon de convergence infini et l'on peut donc intervertir série et intégrale sur tout segment :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Pour obtenir le deuxième développement en série, on se ramène à la première car on ne peut pas intervertir la série entière et l'intégrale sur un intervalle non borné (toutes les intégrales de la somme sont divergentes). En utilisant le résultat des questions Q**??** et Q**??** et la formule ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right] &= -\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\right]\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}-1.\end{aligned}$$

Q30. Posons $u_n=\dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$. Alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(2n+1)\pi^2}{(2n+3)^2(2n+2)}<\dfrac{\pi^2}{(2n+3)^2}<1$ dès que $n\geqslant 1$. Il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$ est du signe de $(-1)^p$ pour tout $p\geqslant 1$. En particulier, pour $p=4$ a-t-on

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} > \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Avec le résultat de Q**??**, il vient

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right] > 2\sum_{n=0}^{3}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}-1>0.17.$$

Plus précisément, on a pour tout $p\geqslant 1$:

$$2\sum_{n=0}^{2p}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}-1<\lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right]<2\sum_{n=0}^{2p+1}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}-1.$$

Il s'ensuit que $\|S_n-f\|_{\infty}$ (norme infinie sur $]0,\pi/2[$) ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,\pi/2[$. Cela dit, le résultat est bien plus fort que la non convergence uniforme, qui aurait pu être obtenue en une ligne par l'absurde dès la question Q**??** avec le théorème d'interversion des limites (pris pour x tendant vers 0).