CONCOURS INTERNE
ET
CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION
DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

SESSION DE 1989
DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : 5 feuilles de papier quadrillé 5 × 5.

L'épreuve comprend trois parties. Les deux premières s'organisent autour d'activités qui se situent au niveau de la pratique de la géométrie. La dernière partie replace sur un plan plus général des propriétés qui ont été dégagées dans les activités.

PREMIÈRE PARTIE

Soit dans le plan orienté un triangle PQR de sens direct. La construction de triangles UVW, éventuellement aplatis, tels que :

$$\text{(I)} \quad \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PU} + \overrightarrow{QV} + \overrightarrow{RW} = \vec{0} \\ PU = QV = RW\,. \end{array} \right.$$

fait l'objet de cette séquence.

Il est conseillé, pour la figure d'étude, de prendre $PQ = 8$, $QR = 10$ et $RP = 12$, l'unité de longueur étant le centimètre.

1. *a.* On suppose construit un triangle UVW vérifiant (I). Soit T le point défini par $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{QV}$.
   Montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RW}$ et que le triangle PUT est équilatéral pour U distinct de P.

   b. Déduire de la question précédente une construction des triangles UVW dont le sommet U est un point donné du plan distinct de P et qui satisfont à la condition (I). Donner, pour chaque solution, la valeur de $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW})$ $[2\pi]$.

2. Soit UVW un triangle satisfaisant à (I) et tel que $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

   a. Montrer que W est l'image de V dans la rotation $\mathcal{R}_1$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ transformant Q en R.

   b. On note O_1 le centre de la rotation $\mathcal{R}_1$ et O_2, O_3 les centres des rotations $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ transformant respectivement R en P et P en Q.
   Déterminer la nature de la composée $\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ de ces trois rotations. En déduire que le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral.

   c. Démontrer que les points U, V, W sont les symétriques d'un point du plan par rapport aux droites (O_2O_3), (O_3O_1) et (O_1O_2) respectivement. Justifier alors la propriété suivante :
   « Soit S un point du plan distinct des sommets du triangle $O_1O_2O_3$. Les points U, V, W, symétriques de S par rapport aux droites (O_2O_3), (O_3O_1) et (O_1O_2) respectivement, sont les sommets d'un triangle satisfaisant à (I) et tel que, si $U \neq P$, $(\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{RW}) = -\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. »
   Que se passe-t-il si S est un des sommets du triangle $O_1O_2O_3$?

3. Soit UVW un triangle satisfaisant à (I). Démontrer que les triangles PQR et UVW ont le même centre de gravité qui est aussi le centre de gravité du triangle équilatéral $O_1O_2O_3$.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIÈME PARTIE

A Pour cette séquence, l'énoncé décrit entièrement la situation. On se bornera à faire des figures utiles et à justifier les propriétés en italique.

Les données sont :

- deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires et sécantes en O ;
- deux nombres réels l, $l > 0$, et α, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Deux points mobiles A et B se déplacent sur D_1 et D_2 respectivement de façon que $AB = l$. Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AM}$.

Pour les figures, on prendra $l = 1$ et $\alpha = 0{,}2$, l'unité de longueur étant 10 cm.

1. *Le point N décrit le cercle de centre O et de rayon $|\alpha|\, l$ lorsque A se déplace sur D_1.*
2. *Le point M est l'image de N dans l'affinité orthogonale d'axe D_2 et de rapport $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.*
3. *Le point M décrit, pour $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, une ellipse d'axes D_1 et D_2.*

Application :

Soit l'ellipse d'équation $9x^2 + y^2 = 36$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Expliquer le tracé de cette ellipse à l'aide d'une bande de papier de longueur 8 cm sur laquelle est marqué un point à la distance 2 cm de l'une des extrémités.

B Les données sont à présent :

- deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires et sécantes en O ;
- deux points A_0 et B_0, distincts de O, appartenant à D_1 et D_2 respectivement.

L'étude de l'ensemble F des antidéplacements f du plan tels que $f(A_0)$ et $f(B_0)$ appartiennent respectivement à D_1 et D_2 est le thème de cette séquence.

1. *a.* Déterminer les symétries orthogonales appartenant à l'ensemble F.

   b. Soit I_0 le milieu du segment A_0B_0. Démontrer que l'ensemble des images I de I_0 par les antidéplacements f est le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $I_0I_1I_2$, où I_1 et I_2 désignent les symétriques de I_0 par rapport à D_1 et D_2.

   Dans la suite, on note Ω l'ensemble des triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
   - $\alpha + \beta + \gamma = 1$;
   - le barycentre I des points pondérés $(I_1, \alpha), (I_2, \beta) (I_0, \gamma)$, soit : $\overrightarrow{OI} = \alpha\,\overrightarrow{OI_1} + \beta\,\overrightarrow{OI_2} + \gamma\,\overrightarrow{OI_0}$, est situé sur le cercle $\mathscr{C}$.

   On <u>montrera</u> que cette dernière propriété équivaut à : $\alpha\beta + \beta\gamma \sin^2 \widehat{B}_0 + \gamma\alpha \sin^2 \widehat{A}_0 = 0$,

   où $\widehat{A}_0$ et $\widehat{B}_0$ désignent les mesures des angles de sommets A_0 et B_0 du triangle rectangle OA_0B_0.

2. Soit (α, β, γ) un élément de Ω et g l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M_0, associe le point M, barycentre des points pondérés $(M_1, \alpha), (M_2, \beta), (M_3, \gamma)$, où M_1, M_2 et M_3 désignent les symétriques de M_0 par rapport aux droites D_1, D_2 et (A_0B_0) respectivement.

   a. Soit M_0 et N_0 deux points du plan et M, N leurs images par g.

   Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \alpha\,\overrightarrow{M_1N_1} + \beta\,\overrightarrow{M_2N_2} + \gamma\,\overrightarrow{M_3N_3}$.

   Calculer MN en fonction de M_0N_0 et en déduire que g est une isométrie.

   b. Montrer que les points $A = g(A_0)$ et $B = g(B_0)$ appartiennent respectivement à D_1 et D_2.

   c. Soit O_3 le symétrique de O par rapport à la droite (A_0B_0). Montrer que les points O, $O' = g(O)$, $O'_3 = g(O_3)$, $A = g(A_0)$ et $B = g(B_0)$ sont cocycliques. Le plan étant orienté, établir l'égalité d'angles de droites : $(O_3B_0, O_3O) = -(O'_3B, O'_3O')$ et en déduire que g est un antidéplacement.

   d. Établir que l'ensemble F des antidéplacements f est égal à l'ensemble G des applications g associées aux éléments de Ω.

3. Soit M_0 un point du plan et f un élément de F.

   a. Montrer qu'il existe une unique application affine $\mathscr{A}$ du plan telle que : $\mathscr{A}(I_1) = M_1$, $\mathscr{A}(I_2) = M_2$, $\mathscr{A}(I_0) = M_3$.

   Prouver que $M = f(M_0)$ est l'image de $I = f(I_0)$ par cette application affine $\mathscr{A}$ et que, en notant :

   $$\mathscr{L}(M_0) = \{f(M_0)\,;\ f \in F\}, \quad \text{on a} \quad \mathscr{L}(M_0) = \mathscr{A}(\mathscr{C}).$$

Tournez la page S.V.P.

b. Démontrer que si M_0 appartient au cercle de diamètre A_0B_0, les trois points M_1, M_2, M_3 sont alignés et que l'ensemble $\mathscr{L}'(M_0)$ est un segment de droite.

c. On suppose que M_0 n'appartient pas au cercle de diamètre A_0B_0. La droite (I_0M_0) coupe ce cercle en J_0 et K_0. Indiquer un procédé de construction de $\mathscr{L}'(M_0)$ à partir des ensembles $\mathscr{L}'(J_0)$ et $\mathscr{L}'(K_0)$.

4. Application.

Un triangle ABC mobile se déplace dans le plan de façon que ses sommets A et B se déplacent sur D_1 et D_2. Expliquer comment on peut tracer à l'aide d'une bande de papier l'ensemble décrit par le point C.

TROISIÈME PARTIE

Soit dans le plan orienté un triangle ABC de sens direct. On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. À tout élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathscr{T}$ on associe l'application h du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point $M' = h(M)$, barycentre du système des points pondérés $(M_1, \alpha), (M_2, \beta), (M_3, \gamma)$, où M_1, M_2, M_3 désignent respectivement les symétriques de M par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). L'étude des applications h fait l'objet de cette dernière partie.

1. Soit h l'application associée à l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathscr{T}$ et M, N deux points du plan d'images $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$.

a. Démontrer que $\overline{M'N'} = \alpha\,\overline{M_1N_1} + \beta\,\overline{M_2N_2} + \gamma\,\overline{M_3N_3}$.

b. Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(B; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \dfrac{\overline{BC}}{\|\overline{BC}\|}$. On note :

$$\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \quad \hat{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}), \quad \hat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi].$$

Soit Z, Z_1, Z_2, Z_3 et Z' les affixes respectives des vecteurs $\overline{MN}$, $\overline{M_1N_1}$, $\overline{M_2N_2}$, $\overline{M_3N_3}$ et $\overline{M'N'}$.

Établir les relations, où $\bar{Z}$ désigne le conjugué de Z :
$$\begin{cases} Z_1 = \bar{Z}; \quad Z_2 = e^{-2i\hat{C}}\bar{Z}; \quad Z_3 = e^{2i\hat{B}}\bar{Z}. \\ Z' = (\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}})\bar{Z}. \end{cases}$$

2. Dans cette dernière question, on s'intéresse à la nature de h suivant le module du complexe $\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}$.

a. On suppose que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathscr{T}$ vérifie : $\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}} = 0$.

Établir l'unicité d'un tel élément t de $\mathscr{T}$ et montrer plus précisément que α, β et γ sont proportionnels à $\sin 2\hat{A}$, $\sin 2\hat{B}$ et $\sin 2\hat{C}$. Démontrer que l'application h associée à cet élément t est constante et que, pour tout point M, $h(M) = H$ où H désigne l'orthocentre du triangle ABC.

Faire le lien avec la situation décrite dans la première partie lorsque le triangle ABC est le triangle équilatéral $O_1O_2O_3$.

b. On suppose que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathscr{T}$ vérifie : $|\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}| = 1$.

Démontrer que l'application h associée est un antidéplacement et faire la liaison avec la deuxième partie.

c. On suppose à présent que l'élément $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathscr{T}$ est tel que :
$$|\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}}| = \rho, \quad \rho \neq 0, \quad \rho \neq 1.$$

On pose $\alpha + \beta\, e^{-2i\hat{C}} + \gamma\, e^{2i\hat{B}} = \rho\, e^{i\theta}$.

- Montrer que si un point J est invariant par l'application h associée à t, il vérifie la relation $\alpha\,\overrightarrow{JJ_1} + \beta\,\overrightarrow{JJ_2} + \gamma\,\overrightarrow{JJ_3} = \vec{0}$, où J_1, J_2 et J_3 désignent les symétriques de J par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement.
- Soit G le barycentre du système des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ). En utilisant l'égalité $\overrightarrow{JJ_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et deux égalités analogues, démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{J_2J_3} = 0$ et en déduire que G est le centre du cercle circonscrit au triangle $J_1J_2J_3$.

En admettant la propriété : « les symétriques G_1, G_2, G_3 du point G par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) ne sont pas alignés », montrer que l'application h admet un point invariant unique, le centre J du cercle circonscrit au triangle $G_1G_2G_3$ et qu'elle est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie de centre J et de rapport ρ.