PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

On désigne par $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques à valeurs complexes, et on munit $\mathscr{C}$ de la norme

$$N_\infty : f \longmapsto N_\infty(f) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|.$$

On rappelle d'autre part que l'application qui, à tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{C}$, associe

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

est un produit scalaire hermitien. On pose enfin $N_1(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$.

Pour tout élément p de $\mathbf{Z}$, on note e_p la fonction $t \longmapsto e^{ipt}$. On désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ engendré par les fonctions e_p, où $p \in \mathbf{Z}$; les éléments de E sont appelés polynômes trigonométriques. Enfin, pour tout entier naturel n, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions e_p, où $|p| \leqslant n$.

Dans les parties I, II et III on étudie, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, des procédés d'approximation des fonctions périodiques continues ou lipschitziennes par des polynômes trigonométriques, et on montre que celui de la partie III est en un certain sens optimal. Dans la partie IV on adapte le procédé du III à l'approximation des fonctions de classe C^r et on établit que la rapidité de convergence est d'autant meilleure que les fonctions sont plus régulières.

I. Approximation par la méthode de Fourier

1. *Convolution des fonctions périodiques.*

a. Soit f un élément de $\mathscr{C}$. Prouver que, pour tout nombre réel a, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$.

b. Montrer que, pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathscr{C}$, la fonction $f * g$ définie sur $\mathbf{R}$ par la relation

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\, g(t)\, dt$$

appartient encore à $\mathscr{C}$. Vérifier que $f * g = g * f$.

Prouver que $N_\infty(f * g) \leqslant N_1(g) \cdot N_\infty(f)$.

c. Soit f un élément de $\mathscr{C}$. Établir que, pour tout élément p de $\mathbf{Z}$,

$$f * e_p = c_p(f)\, e_p, \quad \text{où } c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ipt}\, dt = < e_p, f > ;$$

ainsi $c_p(f)$ n'est autre que le $p^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f.

En déduire que, pour tout élément h de E_n, $f * h$ appartient encore à E_n.

On rappelle qu'étant donné un élément f de $\mathscr{C}$, sa somme de Fourier à l'ordre n est par définition :

$$S_n(f) = \sum_{|p| \leqslant n} c_p(f)\, e_p = f * s_n, \quad \text{où } s_n = \sum_{|p| \leqslant n} e_p.$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, les fonctions e_p, où $|p| \leqslant n$, constituent une base orthonormale de E_n.

b. Montrer que l'endomorphisme $S_n : f \longmapsto S_n(f)$ est le projecteur orthogonal de $\mathscr{C}$ sur le sous-espace vectoriel E_n.

On rappelle aussi que si f est en outre de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers f, et qu'en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} N_\infty(f - S_n(f)) = 0$.

3. *Étude d'un exemple.*

On désigne par γ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation $\gamma(t) = \left|\sin \dfrac{t}{2}\right|$.

a. Donner l'allure de la représentation graphique de γ. Montrer que γ est développable en série de Fourier et que ce développement peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p > 0} \frac{\cos px}{4p^2 - 1}.$$

b. Établir que, pour tout entier n, $N_\infty(\gamma - \gamma * s_n) = |\gamma(0) - (\gamma * s_n)(0)| = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{2n+1}$.

4. *Majoration de la norme de l'endomorphisme* S_n.

On rappelle que la norme d'un endomorphisme continu U de $\mathscr{C}$ est donnée par la relation

$$\| U \| = \sup_{N_\infty(f) \leqslant 1} N_\infty(U(f)).$$

a. Montrer que S_n est continu et que $\| S_n \| \leqslant N_1(s_n)$.

b. Établir que, si $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$,

$$(1) \qquad s_n(t) = \frac{\sin (2n+1) \dfrac{t}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}}.$$

c. Prouver que la fonction $u \longmapsto \dfrac{u}{\sin u}$, définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, se prolonge en une fonction continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit ρ sa borne supérieure.

Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$N_1(s_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |s_n(t)|\, dt \leqslant \frac{2\rho}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin (2n+1) u|}{u}\, du = \frac{2\rho}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy.$$

d. Établir que pour tout nombre réel $X \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^X \frac{|\sin y|}{y}\, dy \leqslant 1 + \ln X$; à cet effet, on découpera $[0, X]$ en $[0, 1]$ et $[1, X]$.

e. Prouver finalement qu'il existe un nombre réel strictement positif μ tel que, pour tout $n \neq 0$,

$$\| S_n \| \leqslant \mu \ln(n+1).$$

Tournez la page S. V. P.

5. *Minoration de cette norme.*

Le résultat de cette question n'est pas utilisé dans la suite du problème.

Pour tout entier naturel n, on désigne par γ_n la fonction 2π-périodique paire telle que, pour tout élément t de $[0, \pi]$, $\gamma_n(t) = \sin(2n+1)\frac{t}{2}$.

a. Donner l'allure de la représentation graphique de γ_1.

b. Calculer les coefficients de Fourier de γ_n et prouver que $(\gamma_n * s_n)(0) = \frac{2}{\pi}\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{2q+1}$.

En déduire que $(\gamma_n * s_n)(0) \sim \frac{1}{\pi}\ln n$.

c. Prouver finalement qu'il existe un nombre réel strictement positif ν tel que, pour tout $n \neq 0$,

$$\|S_n\| \geqslant \nu \ln(n+1).$$

II. Approximation par la méthode de Fejer

Cette méthode d'approximation consiste à passer à la moyenne arithmétique des sommes de Fourier; à cet effet, pour tout entier naturel n, on pose

(2) $$k_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} s_p$$

et, pour tout élément f de $\mathscr{C}$, $K_n(f) = f * k_n$.

1. *Calcul de la norme de l'endomorphisme* K_n.

a. À l'aide de (1) établir que, si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

(3) $$k_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

b. À l'aide de (2) montrer que k_n appartient à E_n. Prouver que $N_1(k_n) = 1$; en déduire que K_n est continu et que $\|K_n\| \leqslant 1$. Calculer $K_n(e_0)$ et prouver finalement que $\|K_n\| = 1$.

Ainsi la méthode de Fejer est plus stable que celle de Fourier; cela tient à la positivité de k_n.

2. *Approximation des fonctions continues.*

Soit f un élément de $\mathscr{C}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x,

(4) $$f(x) - (f * k_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-t)]\,k_n(t)\,dt.$$

b. Établir que, pour tout élément α de $]0, \pi]$,

$$N_\infty(f - K_n(f)) \leqslant \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi}N_\infty(f)\int_\alpha^\pi k_n(t)\,dt,$$

$$\text{où}\quad \omega_f(\alpha) = \sup_{|x-x'|\leqslant\alpha}|f(x) - f(x')|.$$

c. À l'aide de (3) prouver que, pour tout élément α de $]0, \pi]$, $\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\pi k_n(t)\,dt = 0$.

d. Montrer enfin que $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f - K_n(f)) = 0$.

Ainsi la méthode de Fejer s'applique à toutes les fonctions continues (contrairement à la méthode de Fourier, ce qu'on ne demande pas d'établir).

3. *Approximation des fonctions lipschitziennes.*

On suppose que f est lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$N_\infty(f - K_n(f)) \leqslant \frac{\lambda(f)}{\pi}\int_0^\pi t\,k_n(t)\,dt.$$

b. Montrer, par un procédé analogue à celui de I.4.*c*, que pour tout entier naturel n,

$$\int_0^\pi t\,k_n(t)\,dt \leqslant \frac{4\rho^2}{n+1}\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 y}{y}\,dy.$$

c. En observant que $\sin^2 y \leqslant |\sin y|$, utiliser la majoration établie au I.4.*d* pour aboutir au résultat suivant : Il existe un nombre réel strictement positif μ' tel que, pour tout n non nul et pour tout élément f de $\mathscr{C}$ lipschitzien,

(5) $$N_\infty(f - K_n(f)) \leqslant \mu'\frac{\ln(n+1)}{n+1}\lambda(f).$$

4. *Retour à l'exemple du I.3.*

Les résultats de cette question ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

a. Montrer que γ est lipschitzienne et calculer $\lambda(\gamma)$.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n,

$$\gamma(0) - (\gamma * k_n)(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}[\gamma(0) - (\gamma * s_p)(0)].$$

c. À l'aide de I.3.*b*, montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif ν' tel que, pour tout entier naturel non nul n,

$$|\gamma(0) - (\gamma * k_n)(0)| \geqslant \nu'\frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

En conclure que la majoration (5) ne peut pas être améliorée (au facteur constant près).

III. Approximation par la méthode de Jackson

Dans la majoration (5) le facteur $\ln(n+1)$ est lié au fait que la suite des intégrales $\int_0^\pi t\,k_n(t)\,dt$ n'est pas dominée par $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ en raison de la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y}\,dy$.

La méthode de Jackson consiste à remplacer les fonctions k_n par des fonctions j_n encore positives et telles qu'en outre la suite des intégrales $\int_0^\pi t\,j_n(t)\,dt$ soit dominée par $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Tournez la page S. V. P.

À cet effet, pour tout entier naturel m, on pose $j_{2m} = j_{2m+1} = \lambda_m k_m^2$, où λ_m est un nombre réel strictement positif choisi tel que $N_1(j_{2m}) = 1$. Enfin, pour tout entier naturel n et pour tout élément f de $\mathscr{C}$, on pose $J_n(f) = f * j_n$.

1. *Étude de l'endomorphisme* J_n.

a. À l'aide de (2) prouver que, pour tout entier naturel m, $k_m = \sum_{|p| \leq m} \left(1 - \frac{|p|}{m+1}\right) e_p$.

b. En déduire que $N_1(k_m^2) = \langle k_m, k_m \rangle = \sum_{|p| \leq m} \left(1 - \frac{|p|}{m+1}\right)^2$.

Montrer que $\lambda_m = \frac{3(m+1)}{2(m+1)^2+1}$ $\left(\text{on rappelle que } 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right)$.

c. A l'aide du a., montrer que, pour tout entier naturel n, j_n appartient à E_n.

d. Calculer $J_n(e_p)$. Prouver finalement que J_n est continu et que $\| J_n \| = 1$.

2. *Approximation des fonctions continues.*

En procédant comme dans la question II.2, montrer que, pour tout élément f de $\mathscr{C}$, $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - J_n(f)) = 0$.

3. *Approximation des fonctions lipschitziennes.*

On suppose en outre que f est lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$N_\infty(f - J_n(f)) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi} \int_0^\pi t\, j_n(t)\, dt.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel m,

$$\int_0^\pi t\, j_{2m}(t)\, dt \leq 4\, \rho^4\, \lambda_m \int_0^{(m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 y}{y^3}\, dy.$$

c. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 y}{y^3}\, dy$ est convergente, et aboutir au résultat suivant :

Il existe un nombre réel strictement positif A tel que, pour tout entier naturel n et pour tout élément f de $\mathscr{C}$ lipschitzien,

(6) $$N_\infty(f - J_n(f)) \leq \frac{A}{n+1} \lambda(f).$$

4. *Optimalité de la majoration* (6).

On reprend la fonction γ étudiée dans la question I.3 et on se propose de minorer $N_\infty(\gamma - h)$ lorsque h parcourt E_n. À cet effet, pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=n+1}^{2n+1} s_p.$$

a. Montrer que v_n appartient à E_{2n+1} et que, pour tout élément h de E_n, $h * v_n = h$.

b. Montrer que $v_n = 2 k_{2n+1} - k_n$. En déduire que, pour tout élément g de $\mathscr{C}$, $N_\infty(g * v_n) \leq 3\, N_\infty(g)$.

c. En écrivant $\gamma - \gamma * v_n$ à l'aide de $\gamma - h$, prouver que $N_\infty(\gamma - h) \geq \frac{1}{4} N_\infty(\gamma - \gamma * v_n)$.

d. En utilisant I.3.b, montrer que $| \gamma(0) - (\gamma * v_n)(0) | \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout élément h de E_n,

$$N_\infty(\gamma - h) \geq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{n+1} \lambda(\gamma),$$

ce qui montre que la méthode d'approximation de Jackson est optimale.

IV. Approximation des fonctions de classe C^r

Pour tout entier $r \geq 1$, on note $\mathscr{C}^r$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ constitué des fonctions de classe C^r sur $\mathbf{R}$, et on convient de poser $\mathscr{C}^0 = \mathscr{C}$. La dérivée d'ordre k d'une fonction f est notée $D^k f$.

1. *Approximation et dérivation.*

On note W_n l'endomorphisme $f \longrightarrow f - J_n(f)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{C}$. Soit g un élément de $\mathscr{C}^1$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$N_\infty(W_n(g)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(Dg).$$

b. Prouver que $D(g * e_p) = (Dg) * e_p$; en déduire que $D(W_n(g)) = W_n(Dg)$.

2. *Approximation des fonctions de classe* C^1 *ou* C^2.

On se propose d'adapter le procédé de Jackson de façon à améliorer la rapidité de convergence. À cet effet, pour tout élément f de $\mathscr{C}^1$, on part de la relation $f = J_n(f) + W_n(f)$, que l'on itère en écrivant que $W_n(f) = (J_n \circ W_n)(f) + W_n^2(f)$, et l'on pose $J_{n,1} = J_n + J_n \circ W_n$.

a. Montrer que $J_{n,1}(f)$ est un élément de E_n, que $J_{n,1}$ est continu et que $\| J_{n,1} \| \leq 3$.

b. Montrer que $N_\infty(W_n^2(f)) \leq \frac{A}{n+1} N_\infty(W_n(Df))$.

En déduire que si f appartient à $\mathscr{C}^1$, $N_\infty(f - J_{n,1}(f))$ est négligeable devant $\frac{1}{n+1}$.

En déduire aussi que si f appartient à $\mathscr{C}^2$, $N_\infty(f - J_{n,1}(f)) \leq \frac{A^2}{(n+1)^2} N_\infty(D^2 f)$.

3. *Approximation des fonctions de classe* C^r *ou* C^{r+1}.

Construire pour tout r un endomorphisme continu $J_{n,r}$ de $\mathscr{C}$ dont l'image est contenue dans E_n et satisfaisant aux deux conditions suivantes:

— Si f appartient à $\mathscr{C}^r$, $N_\infty(f - J_{n,r}(f))$ est négligeable devant $\frac{1}{(n+1)^r}$.

— Si f appartient à $\mathscr{C}^{r+1}$, $N_\infty(f - J_{n,r}(f)) \leq \frac{A^{r+1}}{(n+1)^{r+1}} N_\infty(D^{r+1} f)$.