

Partie I

I.A On diagonalise f_M dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$; on a alors: $(f_M(x), x) = \sum \lambda_i x_i'^2$.

Si $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^+$ on obtient $(f_M(x), x) \geq 0$: M est positive. Sinon, il existe i tel que $\lambda_i < 0$ et alors $(f_M(e'_i), e'_i) = \lambda_i < 0$: M n'est pas positive.

Si $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ on obtient $(f_M(x), x) > 0$ pour $x \neq 0$: M est définie positive. Sinon, il existe i tel que $\lambda_i \leq 0$ et alors $(f_M(e'_i), e'_i) = \lambda_i \leq 0$: M n'est pas définie positive.

- I.B a) $F(v) = \frac{1}{2}(13x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2) - 75x_1 + 75x_2$ est un polynôme donc de classe C^1 .
- b) $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 13x_1 - 4x_2 - 75$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 7x_2 - 4x_1 + 75$; on a donc bien $\nabla F(v) = Av - b$.
- c) $\det(A) = 75 \neq 0$ donc A est inversible : l'unique point critique est $v = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.
- d) Puisque $13x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2 = 4(x_1 - x_2)^2 + 9x_1^2 + 3x_2^2 > 0$ si $v \neq 0$, la surface est un paraboloïde elliptique.
- e) F a donc un minimum global atteint au point critique; il vaut $F(3, -9) = -450$.

I.C Remarque: la fonctionnelle J est associée au couple (A, b) .

- 1) Puisque A est symétrique: $(Av, h) = (v, Ah) = (Ah, v)$.
- 2) a) $R(h) = J(v+h) - J(v) - (Av-b, h) = \frac{1}{2}((Av+Ah, v+h) - (Av, v)) - (b, v+h) + (b, v) - (Av-b, h) = \frac{1}{2}((Ah, h) + (Av, h) + (Ah, v)) - (Av, h) = \frac{1}{2}(Ah, h)$. Puisque A est positive, $R(h)$ est positif ou nul.
- b) $J(v_0+th) - J(v_0) = t(\nabla J(v_0), h) + t^2 R(h) \geq 0$. Si $(\nabla J(v_0), h)$ était non nul, $t(\nabla J(v_0), h) + t^2 R(h)$ serait équivalent à $t(\nabla J(v_0), h)$ au voisinage de $t = 0$ et ne serait donc pas toujours positif ou nul; par suite, $(\nabla J(v_0), h) = 0$ pour tout h et donc $\nabla J(v_0) = 0$.
- 3) a) Puisque A est définie positive, elle n'a pas 0 comme valeur propre et est donc inversible; il existe donc un unique v_0 tel que $Av_0 = b$, $v_0 = A^{-1}b$. Pour h quelconque on a alors $J(v_0+h) = J(v_0) + R(h) \geq J(v_0)$ avec égalité si et seulement si $R(h) = \frac{1}{2}(Ah, h) = 0$, c'est à dire $h = 0$ puisque A est définie positive.
- b) Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ on peut écrire: $J(v - \rho d) = J(v) - \rho(\nabla J(v), d) + \frac{1}{2}\rho^2(Ad, d)$. Cela définit une fonction polynôme du second degré $g(\rho)$ avec $g'(\rho) = -(\nabla J(v), d) + \rho(Ad, d)$ qui s'annule pour $\rho = \frac{(\nabla J(v), d)}{(Ad, d)}$ (par hypothèse, $d \neq 0$ donc $(Ad, d) > 0$). g a donc un minimum atteint pour l'unique $r = \frac{(\nabla J(v), d)}{(Ad, d)} = \frac{(Av-b, d)}{(Ad, d)}$.
- 4) Posons $\alpha = \min(\sigma(A))$ et $m = \max(\sigma(A))$ donc $0 < \alpha \leq m$.
 $(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) = (A(v-u), v-u) = \sum \lambda_i (v'_i - u'_i)^2$ dans une base orthonormale qui diagonalise A . Par suite, $(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) \geq \sum \alpha (v'_i - u'_i)^2 = \alpha \|v - u\|^2$.
D'autre part, $\|\nabla J(v) - \nabla J(u)\|^2 = \|A(v-u)\|^2 = \sum \lambda_i^2 (v'_i - u'_i)^2$ dans la même base orthonormale, d'où $\|\nabla J(v) - \nabla J(u)\|^2 \leq \sum m^2 (v'_i - u'_i)^2 = m^2 \|v - u\|^2$ donc $\|\nabla J(v) - \nabla J(u)\| \leq m \|v - u\|$.
- 5) Pour tout h , $J(u_0+h) = J(u_0) + \frac{1}{2}(Ah, h) \geq J(u_0)$ avec égalité si et seulement si $(Ah, h) = 0$. De $(Ah, h) = \sum \lambda_i h_i'^2$ on déduit que $(Ah, h) = 0$ si et seulement si $h'_i = 0$ quand $\lambda_i \neq 0$, autrement dit si et seulement si $h \in \text{Ker}(A)$. L'ensemble des vecteurs v_0 est donc le sous-espace affine $u_0 + \text{Ker}(A)$.

Partie II

- II.A 1) $\|Mx\|_\infty = \max_i |\sum_j m_{i,j}x_j|$. Or $|\sum_j m_{i,j}x_j| \leq \sum_j |m_{i,j}||x_j| \leq \sum_j |m_{i,j}|\|x\|_\infty$ donc $N_\infty(M) \leq \max_i \sum_j |m_{i,j}|$. Il y a en fait égalité pour x choisi tel que, si le max est obtenu pour i_0 , $x_j = 1$ si $m_{i_0,j} \geq 0$ et -1 si $m_{i_0,j} < 0$.
- 2) a) Si N est une norme subordonnée, on a pour tout x : $\nu(Mx) \leq N(M)\nu(x)$. Par suite, $\nu(ABx) \leq N(A)\nu(Bx) \leq N(A)N(B)\nu(x)$ et donc $N(AB) \leq N(A)N(B)$. On en déduit par récurrence immédiate que pour $k \in \mathbb{N}^*$: $N(A^k) \leq (N(A))^k$.
- b) Soit λ une valeur propre de M ; il existe $x \neq 0$ tel que $Mx = \lambda x$ d'où $\frac{\nu(Mx)}{\nu(x)} = |\lambda|$ qui est donc inférieur ou égal à $N(M)$. Par suite $\rho(M) = \sup(|\lambda_i|) \leq N(M)$.
- 3) a) Si $M' = P_\alpha^{-1}MP_\alpha$ on a $m'_{i,j} = \frac{1}{\alpha^{i-1}}m_{i,j}\alpha^{j-1} = m_{i,j}\alpha^{j-i}$.
- b) $\sum_j |m_{i,j}\alpha^{j-i}| = |m_{i,i}| + \sum_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leq \rho(M) + \sum_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i}$ car $\rho(M) = \max_i |m_{i,i}|$.
Pour tout $i < n$ on a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} = 0$; on peut donc choisir $\alpha > 0$ tel que pour tout i :
 $\sum_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leq \varepsilon$ et par suite on a bien $N_\infty(P_\alpha^{-1}MP_\alpha) = \max_i \sum_j |m_{i,j}\alpha^{j-i}| \leq \rho(M) + \varepsilon$.
- 4) a) Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe P inversible telle $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. On applique le 3)a) pour obtenir $N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha) \leq \rho(M) + \varepsilon$.
- b) Il suffit de poser $N(M) = N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha)$: N est la norme subordonnée à la norme $\nu(x) = \|(PP_\alpha)^{-1}x\|_\infty$ car
$$\sup_x \frac{\nu(Mx)}{\nu(x)} = \sup_x \frac{\|(PP_\alpha)^{-1}Mx\|_\infty}{\|(PP_\alpha)^{-1}x\|_\infty} = \sup_y \frac{\|(PP_\alpha)^{-1}MPP_\alpha y\|_\infty}{\|y\|_\infty} = N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha).$$
- 5) Supposons la condition (i) vérifiée. Soit λ une valeur propre de M et y_0 un vecteur non nul tel que $My_0 = \lambda y_0$. Choisissons $x'_0 = x_0 + y_0$: $f(x'_0) - f(x_0) = M(x'_0 - x_0) = \lambda y_0$ et par récurrence immédiate $x'_k - x_k = M^k(x'_0 - x_0) = \lambda^k y_0$. Comme les suites (x'_k) et (x_k) convergent vers la même limite, la suite $(x'_k - x_k)$ converge vers 0; puisque $y_0 \neq 0$, la suite (λ^k) converge vers 0. On a donc $|\lambda| < 1$ et par suite $\rho(M) < 1$. Cela entraîne que 1 n'est pas valeur propre de M et donc $I - M$ est inversible.
- Supposons maintenant la condition (ii) vérifiée. Puisque $(I - M)$ est inversible il existe un unique d tel que $(I - M)d = c$ donc $f(x) - d = Mx + c - c - Md = M(x - d)$ et par récurrence $x_k - d = M^k(x_0 - d)$. Puisque $\rho(M) < 1$ on peut choisir $\varepsilon < 1 - \rho(M)$ et il existe une norme subordonnée N telle que $N(M) \leq \rho(M) + \varepsilon < 1$. On en déduit que $N(M^k) \leq (N(M))^k$ qui a pour limite 0 et donc la suite M^k converge vers la matrice nulle. La suite (x_k) a donc pour limite le vecteur $d = (I - M)^{-1}(c)$ qui est bien indépendant de x_0 .
- II.B 1) ϕ est bilinéaire, symétrique (S symétrique entraîne que $(Su, v) = (u, Sv)$), et enfin définie positive puisque S est définie positive ($(Su, u) > 0$ si $x \neq 0$).
- 2) Soit $u = S^{-1}Ax \in \text{Im}(S^{-1}A)$ et $v \in \text{Ker}(A)$: $\phi(u, v) = (SS^{-1}Ax, v) = (Ax, v) = (x, Av) = 0$ puisque A est symétrique et $Av = 0$; $\text{Im}(S^{-1}A)$ et $\text{Ker}(A)$ sont bien orthogonaux. Puisque S est inversible, S^{-1} est une bijection de $\text{Im}(A)$ sur $\text{Im}(S^{-1}A)$ donc $\dim(\text{Im}(S^{-1}A)) = \dim(\text{Im}(A)) = n - \dim(\text{Ker}(A))$. $\text{Im}(S^{-1}A)$ et $\text{Ker}(A)$ sont donc supplémentaires orthogonaux pour ϕ .
- 3) Puisque $b = Ax_0$, $Au = b \Leftrightarrow A(x_0 - u) = 0 \Leftrightarrow x_0 - u \in \text{Ker}(A)$. Le vecteur x_0 se décomposant de manière unique $x_0 = u' + v'$ sur $\mathbb{R}^n = \text{Im}(S^{-1}A) \oplus \text{Ker}(A)$, u' est bien l'unique vecteur de $\text{Im}(S^{-1}A)$ tel que $Au' = b$. L'ensemble des solutions de $Au = b$ est le sous-espace affine $u' + \text{Ker}(A)$.
- 4) a) $u_{k+1} = u_k - \gamma S^{-1} \nabla J(u_k) = u_k - \gamma S^{-1}(Au_k - b) = u_k - \gamma S^{-1}A(u_k - x_0)$ donc $u_{k+1} - u_k \in \text{Im}(S^{-1}A)$. La composante de u_k sur $\text{Ker}(A)$ est donc la même que celle de u_0 .
- b) $u'_{k+1} - u'_k = u_{k+1} - u_k = -\gamma S^{-1}A(u_k - x_0) = -\gamma S^{-1}A(w + u'_k - x_0) = -\gamma S^{-1}A(u'_k - x_0)$ donc $f(x) = x - \gamma S^{-1}A(x - x_0) = (I - \gamma S^{-1}A)x + \gamma S^{-1}Ax_0$.

- c) Soit λ une valeur propre complexe de $S^{-1}A$. Il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $S^{-1}AX = \lambda X$ d'où $AX = \lambda SX$ et ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}SX$. Posons $X = X_1 + iX_2$:
 ${}^t\bar{X}AX = {}^t(X_1 - iX_2)A(X_1 + iX_2) = {}^tX_1AX_1 + {}^tX_2AX_2 + i({}^tX_1AX_2 - {}^tX_2AX_1)$. Comme ${}^t({}^tX_2AX_1) = {}^tX_1AX_2$ et ${}^tX_1AX_1 + {}^tX_2AX_2 \geq 0$ (A est positive) on a ${}^t\bar{X}AX \in \mathbb{R}^+$.
De même, ${}^t\bar{X}SX = {}^tX_1SX_1 + {}^tX_2SX_2 > 0$ puisque S est définie positive et X_1 ou X_2 est non nul. On en déduit que $\lambda = \frac{{}^t\bar{X}AX}{{}^t\bar{X}SX} \in \mathbb{R}^+$.
- d) g est par définition un endomorphisme de $\text{Im}(S^{-1}A)$.
De plus, $\text{Ker}(g) = \{x \in \text{Im}(S^{-1}A) / S^{-1}Ax = 0\} = \{x \in \text{Im}(S^{-1}A) / Ax = 0\} = \text{Im}(S^{-1}A) \cap \text{Ker}(A) = \{0\}$. g est donc un automorphisme de $\text{Im}(S^{-1}A)$.
- e) Les valeurs propres complexes de g sont des valeurs propres de $S^{-1}A$, elles sont donc dans $\mathbb{R}^+$; par suite, le polynôme caractéristique de g est scindé sur $\mathbb{R}$ et celui de $id - \gamma g$ aussi. Puisque g est inversible, ses valeurs propres vérifient $0 < \lambda \leq \Lambda_n$, celles de γg vérifient $0 < \lambda \leq \gamma \Lambda_n < 2$ et celles de $id - \gamma g$ sont donc dans $] -1, 1[$: le rayon spectral de $id - \gamma g$ est strictement inférieur à 1.
- f) La suite (u'_k) est définie par $u'_{k+1} = f(u'_k) = (id - \gamma g)(u'_k) + c$ avec $c = \gamma S^{-1}Ax_0$. Puisque $\rho(id - \gamma g) < 1$, la question II.A.5 entraîne que la suite (u'_k) converge dans $\text{Im}(S^{-1}A)$ vers une limite u' indépendante de u'_0 .
- g) Par continuité de $id - \gamma g$ on a $u' = (id - \gamma g)(u') + c$ donc $\gamma g(u') = c$, $\gamma S^{-1}Au' = \gamma S^{-1}Ax_0$ et enfin $Au' = Ax_0 = b$.

Partie III

- III.A 1) On doit supposer $d_k \neq 0$. Puisque A est définie positive on peut appliquer le I.C.3b) et alors $r_k = \frac{(Au_k - b, d_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{(d_k, d_k)}{(Ad_k, d_k)}$. On en déduit: $(d_{k+1}, d_k) = (Au_{k+1} - b, d_k) = (Au_k - r_k Ad_k - b, d_k) = (Au_k - b, d_k) - r_k(Ad_k, d_k) = 0$.
- 2) Appliquons le I.C.2a): $J(u_k) - J(u_k - r_k d_k) = -(\nabla J(u_k), -r_k d_k) - \frac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k) = r_k(d_k, d_k) - \frac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k) = \frac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k)$. Le I.C.4 donne alors: $(Ad_k, d_k) \geq \alpha \|d_k\|^2$ avec $\alpha = \min(\sigma(A))$; donc $J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|d_k\|^2 r_k^2 = \frac{\alpha}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2$.
- 3) On a donc $J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq 0$: la suite $(J(u_k))$ est décroissante; elle est de plus minorée (par le I.C.3a) donc elle converge. L'inégalité précédente entraîne alors que $\|u_{k+1} - u_k\|$ converge vers 0.
- 4) Puisque $(d_{k+1}, d_k) = 0$, $\|d_{k+1} - d_k\|^2 = \|d_{k+1}\|^2 + \|d_k\|^2 \geq \|d_k\|^2$ donc $\|d_k\| \leq \|d_{k+1} - d_k\|$. $\|d_{k+1} - d_k\| = \|A(u_{k+1} - u_k)\| \leq N(A)\|u_{k+1} - u_k\|$ a pour limite 0 donc d_k aussi.
- 5) Avec le I.C.4, $(\nabla J(u_k), u_k - v_0) = (\nabla J(u_k) - \nabla J(v_0), u_k - v_0) \geq \alpha \|u_k - v_0\|^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne: $\alpha \|u_k - v_0\|^2 \leq (d_k, u_k - v_0) \leq \|d_k\| \times \|u_k - v_0\|$ d'où $\|u_k - v_0\| \leq \frac{1}{\alpha} \|d_k\|$ qui tend vers 0. La suite (u_k) converge vers v_0 .

- III.B 1) $d_k = Au_k = \begin{pmatrix} x_k \\ cy_k \end{pmatrix}$. $r_k = \frac{(d_k, d_k)}{(Ad_k, d_k)} = \frac{x_k^2 + c^2 y_k^2}{x_k^2 + c^3 y_k^2}$ donc $u_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{x_k y_k^2 c^2 (c-1)}{x_k^2 + c^3 y_k^2} \\ \frac{x_k^2 y_k (1-c)}{x_k^2 + c^3 y_k^2} \end{pmatrix}$. Les composantes de ce vecteur sont non nulles puisque x_k, y_k, c et $c-1$ sont non nuls.

2) $t_k = \frac{y_k}{x_k}$ et $t_{k+1} = \frac{-x_k}{c^2 y_k}$ donc $t_k t_{k+1} = \frac{-1}{c^2}$.

- 3) On en déduit que $t_{k+2} = t_k$ donc $\frac{x_{k+2}}{x_k} = \frac{y_{k+2}}{y_k}$. Les vecteurs u_{k+2} et u_k sont proportionnels. $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{t_k^2 c^2 (c-1)}{1 + c^3 t_k^2}$ donc $\frac{x_{k+2}}{x_k} = \frac{\frac{y_k}{t_k^2 t_{k+1}} c^4 (c-1)^2}{(1 + c^3 t_k^2)(1 + c^3 t_{k+1}^2)} = \frac{(c-1)^2}{(1 + c^3(t_k^2 + t_{k+1}^2) + c^2)}$. C'est une valeur constante car $t_k^2 + t_{k+1}^2$ est constant. $c^2(t_k^2 + t_{k+1}^2) = c^2 t_k^2 + \frac{1}{c^2 t_k^2} \geq 2$ donc

$$\frac{x_{k+2}}{x_k} \leq \frac{(c-1)^2}{(1 + 2c + c^2)} = \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2 < 1. (u_k) \text{ converge donc vers } 0 \text{ (solution de } Au = 0).$$