

CCP- MP- 1

Corrigé proposé par Pascale de Jonghe .

1- cours.

Soit $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $b \neq c$ et $\|a-d\| = \|a-c\|$.

$$\left\| a - \frac{b+c}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} \|a-b+a-c\|^2 = \frac{1}{4} \left[\|a-b\|^2 + 2(a-b/a-c) + \|a-c\|^2 \right]$$

$a-b$ et $a-c$ colinéaires et $\|a-d\| = \|a-c\|$ entraînent $a=b=c$ ou $a = \frac{b+c}{2}$;

D'où , $a-b$ et $a-c$ colinéaires et $\|a-d\| = \|a-c\| \Leftrightarrow a = \frac{b+c}{2}$;

Si $a = \frac{b+c}{2}$ on a $\|a-b\| > 0 = \left\| a - \frac{b+c}{2} \right\|$ sinon $a=b=c$;

Si $a \neq \frac{b+c}{2}$ d'après l'inégalité de Cauchy - Schwarz et le cas d'égalité on a :

$$(a-b/a-c) < \|a-b\| \|a-c\| = \|a-b\|^2 \text{ et donc : } \left\| a - \frac{b+c}{2} \right\| < \|a-b\|$$

2- Soit F un fermé non vide de \mathbb{R}^n et soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que F est borné :

F est un fermé , borné de \mathbb{R}^n donc compact ; l'application $y \rightarrow \|x-y\|$ est continue de F dans \mathbb{R}_+ , elle

est donc bornée et elle atteint ses bornes : $\exists u \in F$ tel que $\|x-u\| = \inf_{y \in F} (f(y))$.

Concl :

$$\boxed{\exists u \in F \quad \forall y \in F \quad \|x-u\| \leq \|x-y\|}$$

Cas général :

$\{\|x-y\| : y \in F\}$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , elle a donc une borne inférieure $m \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists y_n \in F \quad m \leq \|y_n - x\| < m + \frac{1}{n}$$

Il existe alors une suite $(y_n)_n$ d'éléments de F telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = m$;

$(y_n)_n$ est une suite d'éléments de F . elle est contenue dans $\overline{B}(0, m+1)$ compact de \mathbb{R}^n (ev dim finie) .

Donc $(y_n)_n$ a une valeur d'adhérence $u \in \mathbb{R}^n$. F étant fermé $u \in F$. En utilisant la suite extraite de

$(y_n)_n$ qui converge vers u on obtient $\|x-u\| = m$.

Concl :

$$\boxed{\exists u \in F \quad \forall y \in F \quad \|x-u\| \leq \|x-y\|}$$

3 - Soit A un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n . D'après I2 : $\exists u \in A \quad \forall y \in A \quad \|x-u\| \leq \|x-y\|$;

supposons l'existence d'un autre élément $v \in A$ tel que : $\forall y \in A \quad \|x-v\| \leq \|x-y\|$;

On a $\|x - u\| \leq \|x - v\| \leq \|x - u\|$ donc $\|x - u\| = \|x - v\|$;

D'après I1 , si $u \neq v$ alors $\left\|x - \frac{u+v}{2}\right\| < \|x - u\|$. Or $\frac{u+v}{2} \in A$ (A est convexe) . Il y a contradiction avec la définition de u . Donc $u = v$; et par suite :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \exists ! u \in A \forall y \in A \quad \|x - u\| \leq \|x - y\|}$$

4- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in A$ tel que $\forall y \in A \quad (x - \alpha / y - \alpha) \leq 0$;

Soit $y \in A \quad \|x - y\|^2 = \|x - \alpha\|^2 - 2(x - \alpha / y - \alpha) + \|y - \alpha\|^2 \geq \|x - \alpha\|^2 + \|y - \alpha\|^2 \geq \|x - \alpha\|^2$

Donc , $\alpha \in A$ et $\forall y \in A \quad \|x - \alpha\| \leq \|x - y\|$; Par suite ,

$$\boxed{\alpha = P(x)}$$

5- Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que $(x - P(x) / y - P(x)) > 0$;

Rmq : $y \neq P(x)$ sinon le produit scalaire précédent serait nul .

Soit $t \in]0,1[\quad S(t) - \|x - P(x)\|^2 = t^2 \|y - P(x)\|^2 - 2t(x - P(x) / y - P(x)) < t^2 \|y - P(x)\|^2 - 2t$

Le dernier terme de l'inégalité est un polynôme de degré 2 en t dont l'une des racines est 0 et l'autre est strictement positive ; donc :

$$\boxed{\exists t \in]0,1[\quad S(t) < \|x - P(x)\|^2}$$

6- Supposons que $u = P(x)$.

Par définition $u \in A$. S'il existe $y \in A$ tel que $(x - u / y - u) > 0$ alors d'après I5 il existe $t \in]0,1[$ tel que

$S(t) < \|x - P(x)\|^2$. On pose $z = u + t(y - u) = (1-t)u + ty \in A$ car A est convexe . Et alors

$\|x - z\|^2 < \|x - u\|^2$ contredit $u = P(x)$.

Donc $\forall y \in A \quad (x - u / y - u) \leq 0$.

Supposons que : $u \in A$ et $\forall y \in A \quad (x - u / y - u) \leq 0$. D'après I4 , $u = P(x)$.

Concl :

$$\boxed{u \in A \text{ et } \forall y \in A \quad (x - u / y - u) \leq 0 \Leftrightarrow u = P(x)}$$

7- Soit $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$. D'après I6 on a : $P(x) \in A \Rightarrow (x - P(x) / P(y) - P(x)) \leq 0$ et

$P(y) \in A \Rightarrow (y - P(y) / P(x) - P(y)) \leq 0$. On ajoute les deux inégalités :

$(x - P(x) - y + P(y) / P(y) - P(x)) \leq 0$.

Concl :

$$\boxed{(x - y / P(y) - P(x)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz , l'inégalité précédente donne : $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$ PR tt (x, y) . Donc P est lipchitzienne donc continue sur \mathbb{R}^n .

Par définition $P(\mathbb{R}^n) \subset A$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (x - x / y - x) = 0 \leq 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in A \quad P(x) = x}$$

Et $A \subset P(\mathbb{R}^n)$.

$$\boxed{\text{Donc } P(\mathbb{R}^n) = A}$$

8- Soit $x \notin A$, supposons que $P(x) \in \overset{\circ}{A}$: $\exists r > 0 \quad B_o(P(x), r) \subset A$. $x \notin A$ donc $x \neq P(x)$ donc

$$\|x - P(x)\| > 0 \quad \text{on pose} \quad \lambda = \frac{1}{2} \min(r, 2\|x - P(x)\|) \quad \text{et} \quad y = P(x) - \frac{\lambda}{\|x - P(x)\|} (x - P(x))$$

$$\|y - P(x)\| = \lambda < r \quad \text{donc} \quad y \in B_o(P(x), r) \subset A \quad \text{et} \quad \|x - y\| < \left| 1 - \frac{\lambda}{\|x - P(x)\|} \right| \|x - P(x)\| < \|x - P(x)\|$$

impossible contredit la définition de $P(x)$.

$$\boxed{\text{Donc} \\ x \notin A \Rightarrow P(x) \notin \overset{\circ}{A}}$$

9- Soit $x \in B \quad \|x - f(x)\| \neq 0$

$$x + \rho(x)(x - f(x)) \in S \Leftrightarrow \|x - \rho(x)(x - f(x))\|^2 = 1 \Leftrightarrow \rho(x)^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\rho(x)(x / x - f(x)) + \|x\|^2 - 1 = 0$$

On obtient une équation du second degré d'inconnue $\rho(x)$.

$$\Delta' = (x / x - f(x))^2 - \|x - f(x)\|^2 (\|x\|^2 - 1) \geq 0 \quad \text{car} \quad \|x\|^2 - 1 \leq 0$$

$$\frac{-(x / x - f(x)) \pm \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2}$$

Les deux racines sont : $\frac{-(x / x - f(x)) \pm \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2}$. Leur produit est négatif donc elles sont de signe opposé ;

$$\Delta' \geq (x / x - f(x))^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} \geq |x / x - f(x)| \quad \text{donc} \quad \frac{-(x / x - f(x)) + \sqrt{\Delta'}}{\|x - f(x)\|^2} \geq 0$$

On remarque que $(x / x - f(x)) = \|x\|^2 - (x / f(x)) \geq \|x\|^2 - \|x\| \|f(x)\|$

Une des racines est nulle si et seulement si $\|x\|^2 - 1 = 0$, l'autre racine est alors

$$\frac{-(x / x - f(x)) \pm |x / x - f(x)|}{\|x - f(x)\|^2} = -2 \frac{(x / x - f(x))}{\|x - f(x)\|^2} \leq 0 \quad \text{car} \quad (x / x - f(x)) \geq 1 - \|f(x)\| \geq 0 \quad (\text{en effet}$$

$f(B) \subset B$);

Par suite, pour tout $x \in B$ il existe un unique réel positif

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{(x / x - f(x))^2 + (1 - \|x\|^2) \|x - f(x)\|^2} - (x / x - f(x))}{\|x - f(x)\|^2}$$

vérifiant la propriété demandée

On définit ainsi une application ρ de B dans \mathbb{R}^+ . Elle est obtenue à partir d'applications de classe C^2 donc ρ est de classe C^2 sur B .

D'après le calcul déjà fait $x \in S \Leftrightarrow \rho(x) = 0$

10- $\forall x \in B \varphi(x) \in S$ par définition. Donc $\forall x \in B \varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x)^2 = 1$.

φ et α sont de classe C^2 sur B car f et ρ le sont. On dérive par rapport à x_1 et par rapport à x_2 :

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} \varphi_1(x) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} \varphi_2(x) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} \varphi_1(x) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} \varphi_2(x) = 0 \end{cases}$$

Soit g l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice proposée que nous noterons A_x . On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique.

$$(1) \Rightarrow \varphi(x) \in \ker(g^*) = (\text{Im}(g))^{\circ} \Rightarrow \text{vect}(\varphi(x)) \subset (\text{Im}(g))^{\circ} \Rightarrow \text{Im}(g) \subset \text{vect}(\varphi(x))^{\circ}$$

$$\varphi(x) \in S \Rightarrow \varphi(x) \neq 0 \Rightarrow \dim(\text{vect}(\varphi(x))) = 1 \Rightarrow \dim(\text{vect}(\varphi(x))^{\circ}) = 1 \Rightarrow \text{rg}(A_x) = \text{rg}(g) \leq 1 < 2$$

Donc A_x est singulière

Rmq : « singulière » n'est plus utilisée dans le programme.

11-a On développe le déterminant et on pose :

$$\forall x \in B \quad \beta(x) = \alpha_{2,2}(x) + \alpha_{1,1}(x) \quad \gamma(x) = \alpha_{1,1}(x)\alpha_{2,2}(x) - \alpha_{1,2}(x)\alpha_{2,1}(x)$$

α est C^2 sur B donc ses dérivées partielles existent et sont C^1 sur B donc β et γ C^1 sur B ;

$$\forall x \in B \quad \forall i \in \{1,2\} \alpha_i(x) = \varphi_i(x) - x_i \quad \forall (i,j) \in \{1,2\}^2 \quad \forall x \in B \quad \alpha_{i,j}(x) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) - \delta_{i,j}$$

D'où $\forall x \in B \quad \Psi(x,1) = \det(A_x) = 0$ car A_x est singulière.

11b- Pour tout $t \in [0,1] x \rightarrow \Psi(x,t)$ est continue sur B car β et γ C^1 sur B et B compact donc $J(t)$ existe.

$$J(0) = \text{aire}(B) = \pi \quad \text{et} \quad J(1) = 0$$

$$\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = \iint_B \alpha_{1,1}(x) dx_1 dx_2 + \iint_B \alpha_{2,2}(x) dx_1 dx_2$$

11c- B . Les applications étant continues sur B on peut utiliser le théorème de Fubini :

$$\iint_B \alpha_{2,2}(x) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{\partial \alpha_{2,2}}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = \int_{-1}^1 \left[\alpha_2(x_1, \sqrt{1-x_1^2}) - \alpha_2(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}) \right] dx_1$$

Or $x = (x_1, \pm\sqrt{1-x_1^2}) \in S \Rightarrow \rho(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,2\} \alpha_i(x) = 0$. On en déduit que

$$\iint_B \alpha_{2,2}(x) dx_1 dx_2 = 0 \quad \iint_B \alpha_{1,1}(x) dx_1 dx_2 = 0$$

. Et de manière analogue

$$\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$$

Donc

11d- $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$ est continue sur B car g est C^2 sur B. On peut appliquer le théorème de Fubini.

$$I_1(g) = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) dx_1 \right] dx_2$$

Effectuons une intégration par partie dans la 1^o intégrale

$$x_2 \in [-1,1] \text{ fixé : } u(x_1) = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \quad u'(x_1) = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$$

$$v(x_1) = g_1(x_1, x_2) \quad v'(x_1) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

u et v sont C^1 sur $\left[-\sqrt{1-x_2^2}, \sqrt{1-x_2^2} \right]$

$$I_1(g) = \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \times g_1(x_1, x_2) \right]_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 - \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} g_1(x_1, x_2) \times \frac{\partial g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2$$

Donc

$$I_1(g) = \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) \times g_1(\sqrt{1-s^2}, s) - \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \times g_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \right) ds - \iint g_1(x) \times \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2$$

En intégrant d'abord en x_2 puis en x_1 on obtient la formule donnée pour $I_2(g)$.

$$\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = \iint_B (\alpha_{1,1}(x) \alpha_{2,2}(x) - \alpha_{2,1}(x) \alpha_{1,2}(x)) dx_1 dx_2$$

α est de classe C^2 sur B donc on peut utiliser le calcul précédent et le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2 \partial x_1} ; \text{ On a alors } \iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = I_1(\alpha) - I_2(\alpha)$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\alpha_1(\sqrt{1-s^2}, s) \times \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) - \alpha_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \times \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \right) ds -$$

$$\int_{-1}^1 \left(\alpha_1(s, \sqrt{1-s^2}) \times \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(s, \sqrt{1-s^2}) - \alpha_1(s, -\sqrt{1-s^2}) \times \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(s, -\sqrt{1-s^2}) \right) ds$$

Or $x = (s, \pm \sqrt{1-s^2}) \in S \Rightarrow \rho(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} \quad \alpha_i(x) = 0$

Et $x = (\pm \sqrt{1-s^2}, s) \in S \Rightarrow \rho(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2\} \quad \alpha_i(x) = 0$

Donc $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$

$$\forall t \in [0,1] \quad J(t) = \iint_B dx_1 dx_2 + t \iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 + t^2 \iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = \iint_B dx_1 dx_2 = J(0) = \pi$$

Donc J est constante. Or $J(1) = 0 \neq \pi$: Impossible. Par suite, l'hypothèse « $\forall x \in B \quad f(x) \neq x$ » est fautive.

Conclusion : toute application de classe C^2 de B dans B a au moins un point fixe.

12- Soit (g_1, g_2) les fonctions coordonnées de g : chacune est continue sur B car g l'est. F est un fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 donc d'après la généralisation du théorème de Weierstrass, on a :

$$\forall i \in \{1, 2\} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g_{i(\varepsilon)} \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \text{ telle que } \sup \{ |g_i(t) - g_{i(\varepsilon)}(t)| : t \in F \} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ on pose $g_{(\varepsilon)} = (g_{1(\varepsilon)}, g_{2(\varepsilon)}) \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

$$\forall x \in F \quad \|g_{(\varepsilon)}(x) - g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^2 (g_{i(\varepsilon)}(x) - g_i(x))^2 \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \right)^2$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \exists g_{(\varepsilon)} \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \sup \{ \|g(x) - g_{(\varepsilon)}(x)\| : x \in F \} \leq \varepsilon$

13- Soit $x \in B : \|f(x)\| \leq 1$ donc $\|h_{(\varepsilon)}(x)\| = \frac{\|f_{(\varepsilon)}(x)\|}{1+\varepsilon} \leq \frac{\|f_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| + \|f(x)\|}{1+\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon + 1}{1+\varepsilon} = 1$

donc $h_{(\varepsilon)}(x) \in B$.

D'où $h_{(\varepsilon)}(B) \subset B$

Soit $x \in B$

$$\|h_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| = \left\| \frac{f_{(\varepsilon)}(x)}{1+\varepsilon} - f(x) \right\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \|f_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \times 1 \leq 2\varepsilon$$

Donc $\sup \{ \|h_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| : x \in B \} \leq 2\varepsilon$

14- Soit f une application continue de B dans B et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 13 il existe une application h_n de classe

C^2 de B dans B vérifiant $\sup \{ \|h_n(x) - f(x)\| : x \in B \} \leq \frac{2}{n}$. D'après le théorème de Brouwer particulier h_n

a au moins un point fixe x_n et on a $\|x_n - f(x_n)\| \leq \frac{2}{n}$ (1).

$(x_n)_n$ est une suite d'éléments de B fermé borné de \mathbb{R}^2 donc compact. Donc $(x_n)_n$ a une valeur

d'adhérence $x \in B$: Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers x et f étant continue sur B on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x) \quad (1) \text{ entraîne } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_{\varphi(n)} - f(x_{\varphi(n)})\| \leq \frac{2}{\varphi(n)}. \text{ Par passage à la limite on}$$

obtient $\|f(x) - x\| \leq 0$. Donc $f(x) = x$.

D'où : si f est une application continue de B dans B , f a au moins un point fixe dans B .

15- $x \in B \Leftrightarrow rx \in \overline{B}(0, r)$. Donc : $f \in C^2(\overline{B}(r), \overline{B}(0, r)) \Rightarrow g \in C^2(B, \mathbb{R}^2)$.

$$\forall x \in B \quad \|g(x)\| = \frac{1}{r} \|f(rx)\| \leq \frac{1}{r} r = 1. \text{ Donc } g(B) \subset B.$$

D'après 14, g au moins un point fixe $x \in B$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{r} f(rx) = x \Leftrightarrow f(rx) = rx \quad ; \text{ De plus } rx \in \overline{B}(0, r).$$

D'où : si f est une application continue de $\overline{B}(0, r)$ dans lui-même, f a au moins un point fixe dans $\overline{B}(0, r)$.

$$16- \quad f\left(A - \overset{\circ}{A}\right) \subset A \Leftrightarrow \forall x \in A - \overset{\circ}{A} \quad f(x) \in A$$

16a- A borné donc $\exists r_1 > 0 \quad A \subset \overline{B}(0, r_1)$. A fermé borné de \mathbb{R}^2 donc compact et f continue sur A donc $f(A)$ est borné donc $\exists r_2 > 0 \quad f(A) \subset \overline{B}(0, r_2)$.

Donc, il existe $r = \max(r_1, r_2) > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, r)$ et $f(A) \subset \overline{B}(0, r)$.

Ce qui donne $A \cup f(A) \subset \overline{B}(0, r)$

16b- Soit $x \in \overline{B}(0, r) \quad P(x) \in A$ donc $h(x) = f(P(x)) \in f(A) \subset \overline{B}(0, r)$. Donc $h(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(0, r)$

D'après 7, P est continue sur \mathbb{R}^2 et $P(\mathbb{R}^2) = A$ de plus f est continue sur A donc h est continue sur $\overline{B}(0, r)$

Donc d'après 15, h a au moins un point fixe $x \in \overline{B}(0, r) \quad ; \quad h(x) = x \Leftrightarrow f(P(x)) = x$

Supposons que $x \notin A$, d'après 8, $P(x) \notin \overset{\circ}{A}$ donc $P(x) \in A - \overset{\circ}{A}$ donc $x = f(P(x)) \in f\left(A - \overset{\circ}{A}\right) \subset A$
absurde. Donc $x \in A$ et $f(x) = f(P(x)) = x$

Concl : f a au moins un point fixe dans A

On a démontré le théorème de Brouwer dans le cas général.

$$17- \quad f(B) \subset S \Rightarrow \forall x \in B \quad \| -f(x) \| = 1 \Rightarrow (-f)(B) \subset S$$

Supposons que f est continue sur B. -f est continue sur B et on a $(-f)(B) \subset S \subset B$. D'après 14, -f a au moins un point fixe $x \in B$. Et $x = -f(x) \in S$ donc $x = f(x)$ ce qui entraîne $x = 0$ impossible car $x \in S$

Donc, f n'est pas continue sur B.

18- $y \notin f(B) \Rightarrow \forall x \in B \quad y \neq f(x)$; Donc g est définie et continue sur B.

D'autre part $\forall x \in B \quad \|g(x)\| = 1$ donc $g(B) \subset S \subset B$.

D'après 4, g a au moins un point fixe $x \in B$. Et $x = g(x) \in g(B) \subset S$ donc $f(x) = x$.

$$x = g(x) \Leftrightarrow y = (1 + \|y - x\|)x$$

$$y \notin f(B) \Rightarrow y \neq f(x) \Rightarrow y \neq x \Rightarrow \|y - x\| > 0$$

$$\text{Par suite, } \|y\| = (1 + \|y - x\|)\|x\| = 1 + \|y - x\| > 1$$

Donc $y \notin f(B) \Rightarrow y \notin B$. Et par suite,
 $B \subset f(B)$

19- $x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$ est continue sur $B - \{0\}$ à valeurs dans S , $x \rightarrow 1 - \|x\|$ est continue sur B à valeurs dans $[0, 1]$ et h est continue sur $S \times [0, 1]$ donc f est continue sur $B - \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} y = y \quad \text{car } \frac{x}{\|x\|} \in S.$$

Donc f est continue en 0 .

Donc f est continue sur B

$$h(S \times [0,1]) \subset S \Rightarrow f(B) \subset S.$$

$\forall x \in S \quad f(x) = h(x,0) = x$. Cela contredit le théorème de non rétractation 17 donc il ne peut pas exister $y \in S$ tel que $\forall x \in S \quad h(x,1) = y$. Comme h est à valeurs dans S , on en déduit que :

$x \rightarrow h(x,1)$ ne peut pas être constante.

20a- $y \notin f(\overline{B}(0,r)) \Rightarrow \forall x \in \overline{B}(0,r) \quad \|y - f(x)\| \neq 0$; f étant continue sur \mathbb{R}^2 , on en déduit que $g(r)$ est continue sur $\overline{B}(0,r)$. De plus, $g(r)(\overline{B}(0,r)) \subset S(0,r) \subset \overline{B}(0,r)$. D'après 14, $g(r)$ a au moins un point fixe $u(r)$.

$$g(r)(u(r)) = u(r) \Rightarrow u(r) \in S(0,r) \Rightarrow \|u(r)\| = r$$

$$u(r) = r \frac{y - f(u(r))}{\|y - f(u(r))\|} \Leftrightarrow f(u(r)) - y = -\frac{\|y - f(u(r))\|}{r} u(r)$$

$$(f(u(r)) - y / u(r)) = -\frac{\|y - f(u(r))\|}{r} \|u(r)\|^2 = -\frac{\|y - f(u(r))\|}{r} r^2$$

D'où $\exists u(r) \in S(0,r) \quad (f(u(r))/u(r)) = (y/u(r)) - r\|y - f(u(r))\|$

20b- Par définition de f , on a $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \notin f(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $r > 0$ $y \notin f(\overline{B}(0,r))$. D'après 20a, $\exists u(r) \in S(0,r) \quad (f(u(r))/u(r)) = (y/u(r)) - r\|y - f(u(r))\|$

D'où $(f(u(r))/u(r)) = (y/u(r)) - r\|y - f(u(r))\| \geq 0$; ce qui entraîne

$$r\|y - f(u(r))\| \leq (y/u(r)) \leq \|y\| \|u(r)\| = r\|y\|. \quad \text{Par suite } \|y\| - \|f(u(r))\| \leq \|y\|.$$

On a alors $\forall r > 0 \quad \exists u(r) \in S(0,r)$ tel que $\|y\| - \|f(u(r))\| \leq \|y\|$;

Et $\|u(r)\| = r \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} \|f(u(r))\| = +\infty$. Il y a une contradiction.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}^2 \quad y \in f(\mathbb{R}^2)$

Donc $\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}^2)$