

**Problème d'algèbre linéaire (parties A, B et C)**

**Q1** Les polynômes  $\frac{X}{2}$  et  $\frac{X+1}{2}$  sont de degré 1 ; lorsqu'on les compose à gauche avec un polynôme de degré 2 au plus, on obtient un polynôme de degré 2 au plus. Donc  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Prouvons la linéarité de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = P\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda Q\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \lambda Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \lambda\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Et ceci vaut quels que soient  $P$ ,  $Q$  et  $\lambda$ .

**Q2** Prouvons la linéarité de  $\varphi$  :  $\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$ . Et ceic vaut quels que soient  $P$ ,  $Q$  et  $\lambda$ .

► Je discerne assez mal l'intérêt de cette question, qui fait double emploi avec la précédente ; l'énoncé aurait pu dire (tout simplement) : « Notons  $\varphi$  la forme linéaire qui, à  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , associe  $P(1)$  ».

**Q3**  $f(1) = 1$ ,  $f(X) = 1/4 + X/2$  et  $f(X^2) = 1/8 + X/4 + X^2/4$ . Donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$  : c'est la matrice  $A$  décrite en haut de page 2.

**Q4**  $A$  est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls : elle est donc inversible. Autre voie : la famille de polynômes est à degrés échelonnés de 0 à 2, donc c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ , dont la matrice  $A$  est par suite inversible.

**Q5**  $\varphi(1) = 1$ , donc  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle. Par suite, son noyau est de dimension  $\dim(\mathbb{R}_2[X]) - 1 = 2$ . Les polynômes  $1 - X$  et  $1 - X^2$  forment clairement une famille libre de  $\ker(\varphi)$ .

**Q6** Le noyau de  $\varphi$  est de dimension 2, donc  $\varphi$  n'est pas injective ;  $\varphi$  n'est pas la forme nulle, donc son image est  $\mathbb{R}$  tout entier.

**Q7** La famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , car elle est à degrés échelonnés de 0 à 2.

**Q8**  $Q$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  ; elle exprime donc les vecteurs de  $\mathcal{B}'$  en fonction de ceux de  $\mathcal{B}$ , ce qui nous donne  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Q9**  $Q$  est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls : elle est donc inversible, et son inverse  $Q^{-1}$  a l'allure suivante :  $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1/2 & c \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  sont à déterminer. Effectuons le produit matriciel  $Q \times Q^{-1}$  :

$$Q \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1/2 & c \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a - 1/2 & b + c + 1/6 \\ 0 & 1 & -2c - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En identifiant avec  $I_3$ , il vient  $a = 1/2$ ,  $c = -1/2$  et  $b = -c - 1/6 = 1/2 - 1/6 = 1/3$ , donc  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

**Q10** Calculons  $M$  :

$$\begin{aligned} M = Q^{-1} \times A \times Q &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

► Le concepteur du sujet aurait pu placer la remarque suivante : « vous devez obtenir une matrice diagonale ».

**Q11** De la relation  $M = Q^{-1} \times A \times Q$ , nous déduisons  $A = Q \times M \times Q^{-1}$ , puis  $A^n = (Q \times M \times Q^{-1})^n = Q \times M^n \times Q^{-1}$ , car les facteurs intermédiaires  $Q^{-1} \times Q$  s'éliminent ; donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2^n & 1/4^n \\ 0 & -2/2^n & -6/4^n \\ 0 & 0 & 6/4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 1/3 - 1/2^{n+1} + 1/(6 \cdot 4^n) \\ 0 & 1/2^n & 1/2^n - 1/4^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

► Ce calcul, passablement délicat à cause des puissances négatives de 2 et de 4, aura sans doute énervé beaucoup de candidats.

**Q12** Appliquer  $n$  fois  $f$  à  $P$  revient à multiplier à gauche la matrice  $P = (a \ b \ c)^T$  par  $A^n$  ; nous aurons donc :

$$\begin{aligned} A^n \times P &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 1/2^{n+1} & 1/3 - 1/2^{n+1} + 1/(6 \cdot 4^n) \\ 0 & 1/2^n & 1/4^n - 1/2^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b/2 - b/2^{n+1} + c/3 - c/2^{n+1} + c/(6 \cdot 4^n) \\ b/2^n + c/4^n - c/2^n \\ c/4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Q13** Nous avons  $f^n(P) = u_n + v_n X + w_n X^2$ , où  $u_n, v_n$  et  $w_n$  sont les coefficients qui apparaissent dans la matrice ci-dessus. Donc  $\varphi(f^n(P)) = u_n + v_n + w_n$ , terme général d'une suite qui converge vers  $a + b/2 + c/3$ .

Calculons l'intégrale du membre de droite :  $\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \left[ at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} \right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ .

Et ceci termine la preuve !

**Q14** Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  fixé, notons  $\mathcal{A}(n)$  l'assertion  $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$ .

Pour  $n = 0$ , le membre de gauche se réduit à  $P$  ; le membre de droite ne comporte qu'un terme, celui d'indice 0, qui est  $\frac{1}{2^0} \sum_0^0 P\left(\frac{X+0}{2^0}\right) = P$ . Ceci établit  $\mathcal{A}(0)$ .

Supposons  $\mathcal{A}(n)$  acquise. Alors, avec l'hypothèse de récurrence, puis la linéarité de  $f$  :

$$f^{n+1}(P) = f(f^n(P)) = f\left(\frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right)$$

L'image de  $P$  par  $f$  est  $\frac{1}{2} \left( P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$ . Pour évaluer l'image par  $f$  du terme d'indice  $k$  de la somme précédente, nous devons remplacer  $X$  par  $\frac{X+k}{2^n}$ . En « sortant » le facteur  $1/2$ , il vient :

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_0^{2^n-1} \left( P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \right)$$

Séparons la somme en deux ; effectuons le changement d'indice  $k' = k + 2^n$  dans la deuxième somme ; et « recollons » les deux sommes. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_0^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Ceci établit  $\mathcal{A}(n+1)$  ; par récurrence,  $\mathcal{A}(n)$  est vraie pour tout  $n$ .

► Le point délicat de cette démonstration est le remplacement de  $X$  par  $\frac{X+k}{2^n}$ , qui a sans doute été omis par les rares candidats qui seront arrivés ici.

Q15 Nous aurons alors, avec cette fois le changement d'indice  $k' = k + 1$  :

$$\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_1^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

Cette dernière quantité est une somme de RIEMANN relative à la fonction  $P$ , à la subdivision à pas constant  $1/2^n$  de l'intervalle  $[0, 1]$  et au choix  $\xi_k = k/2^n$ . La fonction  $P$  est continue, donc la suite des sommes de RIEMANN converge vers  $\int_0^1 P(t) dt$ .

### Exercice de géométrie (partie D)

Q16 L'équation de  $S_m$  s'écrit  $x^2 + y^2 + (z - m\sqrt{2})^2 = m^2 + 2$ . Nous reconnaissons l'équation d'une sphère : son centre a pour coordonnées  $(0, 0, m\sqrt{2})$ , son rayon est  $\sqrt{m^2 + 2}$ .

Q17 Dans le plan  $xOz$ , l'équation de  $\mathcal{P}$  est  $x^2 = z^2 + 2$ , soit  $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ . Nous reconnaissons une hyperbole de centre  $O$  et d'axe focal  $Ox$ . Les asymptotes ont pour équations  $x = z$  et  $x = -z$ .

Q18 *Représentation absente, car sans intérêt particulier.*

Q19 Avec les notations usuelles  $a = b = \sqrt{2}$ , donc l'hyperbole est *équilatère* et son excentricité est  $\sqrt{2}$ . Nous avons  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ , donc les foyers ont pour coordonnées  $(2, 0)$  et  $(-2, 0)$ .

Q20 Choisissons  $z = 0$ , alors  $x = \sqrt{2}\sin(\theta)$  et  $y = -\sqrt{2}\cos(\theta)$  : le point de coordonnées  $(0, \sqrt{2}\sin(\theta), -\sqrt{2}\cos(\theta))$  appartient à  $D_\theta$ .

Observons le système homogène associé aux équations de  $D_\theta$  : en prenant  $z = 1$ , il vient  $x = \cos(\theta)$  et  $y = \sin(\theta)$ . Le vecteur  $(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$  est donc directeur de  $D_\theta$ , et vérifie la condition imposée par l'énoncé.

Q21 Dans l'équation de  $S_m$ , remplaçons  $x$  et  $y$  par leurs expressions en fonction de  $z$  ; il vient :

$$(z \cos(\theta) + \sqrt{2} \sin(\theta))^2 + (z \sin(\theta) - \sqrt{2} \sin(\theta))^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0$$

Développons et simplifions le membre de gauche ; nous obtenons  $2z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 = 0$ , soit  $(z\sqrt{2} - m)^2 = 0$  : la droite  $D_\theta$  coupe la sphère  $S_m$  en un seul point, donc elle est tangente à la sphère.

Q22 Dans le membre de gauche de l'équation de  $\mathcal{E}$ , remplaçons  $x$  et  $y$  par leurs expressions en fonction de  $z$  ; il vient :

$$(z \cos(\theta) + \sqrt{2} \sin(\theta))^2 + (z \sin(\theta) - \sqrt{2} \sin(\theta))^2$$

Après développement et simplification, nous obtenons  $z^2 + 2$ , ce qui montre que tout point de  $D_\theta$  appartient à  $\mathcal{E}$  ; et donc  $D_\theta$  est incluse dans  $\mathcal{E}$ .

Q23 Soit  $M(x, y, z)$  appartenant à  $\mathcal{E}$  ; alors  $x^2 + y^2 = z^2 + 2$ . Les vecteurs  $(x, y)$  et  $(z, \sqrt{2})$  ont même norme ; il existe donc une réflexion d'angle  $\theta/2$  qui envoie  $(z, \sqrt{2})$  sur  $(x, y)$  ; la matrice de cette réflexion est  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Nous en déduisons  $x = z \cos(\theta) + \sqrt{2} \sin(\theta)$  et  $y = z \sin(\theta) - \sqrt{2} \cos(\theta)$ , ce qui prouve l'appartenance de  $M$  à la surface  $\mathcal{E}$ .

Q24  $\mathcal{E}$  est la réunion des droites  $D_\theta$ , où  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ .

- $\mathcal{E}$  est un *hyperboloïde de révolution* ; il est obtenu en faisant tourner l'hyperbole d'équation  $x^2 = z^2 + 2$  (dans le plan  $xOz$ ) autour de l'axe  $Oy$ . Vous trouverez des illustrations intéressantes en cherchant sur l'Internet le mot **hyperboloïde**, ou le mot **mathouriste**.