

E3A 2024 PSI

Mathématiques un corrigé

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Calcul d'une somme

1.1 Par la formule du binôme de Newton, on peut écrire $(1 + X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$. Ainsi, le coefficient de X^n est $\binom{2n}{n}$

1.2 On peut écrire aussi $(1 + X)^{2n} = (1 + X)^n(1 + X)^n$. Dans cette écriture, pour trouver le coefficient de X^n , on somme le produit des coefficients de X^k venant du premier facteur et de celui de X^{n-k} provenant du second facteur. k peut varier de 0 à n .

Ainsi, lorsqu'on développe $(1 + X)^n(1 + X)^n$, le coefficient de X^n est

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

1.3 Rappelons l'égalité : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Par unicité du coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n}$, on obtient par les deux questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure. Son spectre est alors $\{a, c\}$ et $\chi_T(X) = (X - a)(X - c)$.

(a) ou bien $a \neq c$, alors son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} à racines simples. Par propriété T est diagonalisable sur \mathbb{R} .

(b) ou bien $a = c$. Si T était diagonalisable alors il existerait une matrice inversible P et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$ telle que $T = PDP^{-1}$. Or $PDP^{-1} = aI_2$. Ainsi, si T était diagonalisable alors $T = aI_2$. Ce qui est impossible puisque $t_{21} = 2 \neq 0$.

De par cette étude, on en déduit T est diagonalisable si et seulement si $a \neq c$.

3. Par ce qui précède ,

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable} \} &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \neq Z(\omega)\} \\ &= \overline{\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\}} \end{aligned}$$

Puis, $\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\} = \bigcup_{k=0}^n (Y = k) \cap (Z = k)$.

Les événements $((Y = k) \cap (Z = k))_{0 \leq k \leq n}$ sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = k))$$

Les variables aléatoires étant indépendantes et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, on obtient :

$$\mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = k)) = \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = k) = \left(\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right)^2 = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2$$

En conclusion :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}) = 1 - \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

En utilisant le résultat de 1.(c), on obtient :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

4.

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible}\} &= \{\omega \in \Omega, \det(A(\omega)) \neq 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega)Z(\omega) \neq 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \neq 0 \text{ et } Z(\omega) \neq 0\} \end{aligned}$$

Alors, les variables aléatoires étant indépendantes et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible}\}) = \mathbb{P}(Y \neq 0) \mathbb{P}(Z \neq 0) = (1 - \mathbb{P}(Y = 0))^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

EXERCICE 2

On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que, pour tout $(x, t) \in [0, 1]^2$, on note $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$

1. Questions préliminaires

1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

— L'équation caractéristique est $r^2 + \alpha = 0$.

— Les solutions réelles de $y'' + \alpha y$ vont dépendre du signe de α :

Premier cas simple : $\alpha = 0$. Ainsi, les solutions de $y'' = 0$ sont les fonctions affines $y : t \mapsto at + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Deuxième cas : $\alpha < 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique sont deux solutions distinctes : $r_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $r_2 = -\sqrt{-\alpha}$ et on en déduit les solutions de l'équation différentielle :

$$y : t \mapsto a e^{r_1 t} + b e^{r_2 t}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Troisième cas : $\alpha > 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique sont deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \sqrt{\alpha}i$ et $r_2 = -\sqrt{\alpha}i$ et on en déduit les solutions de l'équation différentielle :

$$y : t \mapsto a \cos(\sqrt{\alpha}t) + b \sin(\sqrt{\alpha}t)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

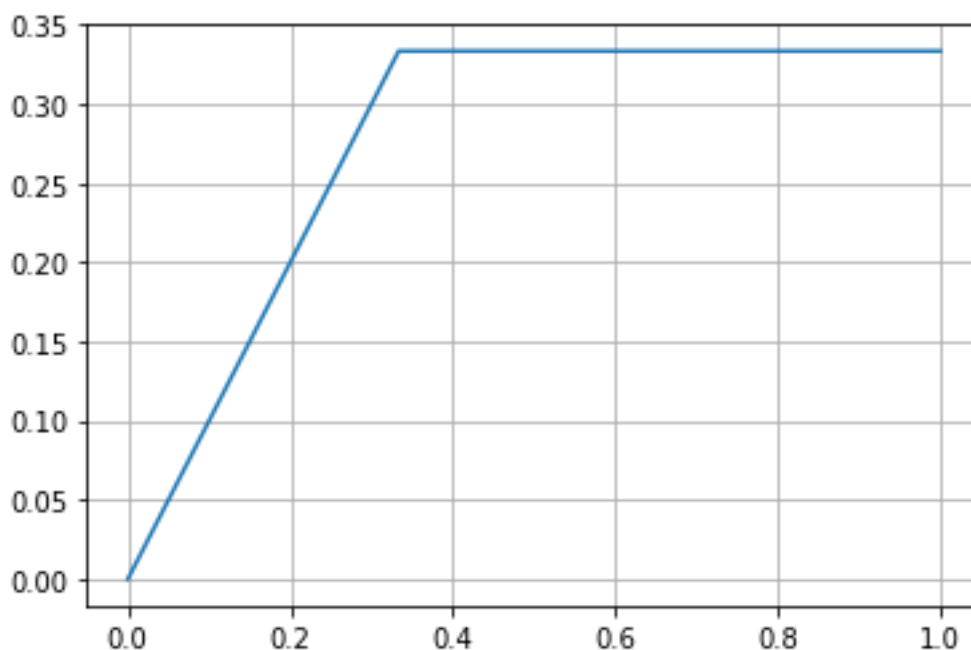
1.2 Soient $h \in E$ et $\alpha \in [0, 1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque h est continue sur $[0, 1]$, H est l'unique primitive de h sur $[0, 1]$ qui s'annule en a . Par définition d'une primitive sur $[0, 1]$, H est dérivable sur $[0, 1]$ et $\boxed{H' = h}$. Puisque h est continue sur $[0, 1]$, H devient $\boxed{C^1 \text{ sur } [0, 1]}$.

2. Cas particuliers

2.1 Par définition de \min , on a $f : t \mapsto \min(\frac{1}{3}, t)$ est définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{3} & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

On en déduit que son graphe est formé par deux segments :



2.2 Par relation de Chasles, on peut écrire

$$\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt = \int_0^{\frac{1}{3}} t dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3} dt$$

Ainsi

$$\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{18}$$

2.3 Soit $x \in [0, 1]$. Par relation de Chasles, on peut écrire

$$\int_0^1 \min(x, t) dt = \int_0^x t dt + \int_x^1 x dt$$

Ainsi

$$\int_0^1 \min(x, t) dt = \frac{x^2}{2} + x(1 - x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

On vérifie que pour $x = \frac{1}{3}$, on retrouve le résultat de la question précédente

3. Soit $f \in E$.

3.1 Écrivons F différemment après avoir utilisé la relation de Chasles :

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, applicable car $t \mapsto t f(t)$ et f sont continues, $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et $x \mapsto \int_x^1 f(t) dt$ sont C^1 sur $[0, 1]$ et respectivement de dérivées $x \mapsto x f(x)$ et $x \mapsto -x f(x)$.

Alors par produit et somme de fonctions de classe C^1 , F l'est également et :

$$\forall x \in [0, 1], F'(x) = x f(x) + \int_x^1 f(t) dt - x f(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

3.2

$$F(0) = \int_0^1 0 f(t) dt = 0$$

$$F'(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$$

3.3 On a déjà vu que F est C^1 sur $[0, 1]$. D'autre part, $\forall x \in [0, 1], F'(x) = \int_x^1 f(t) dt$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, F' est C^1 sur $[0, 1]$. Donc F est C^2 sur $[0, 1]$. Puis $F'' = (F')' = -f$ puisque $(\int_x^1 f(t) dt)' = -f(x)$.

4. À toute fonction f de E , on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

— Remarquons que $T(f) = F \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \subset E$. Ainsi, $T : E \rightarrow E$.

— Montrons proprement la linéarité :

$$\forall (f, g) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^1 \min(x, t) (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt + \mu \int_0^1 \min(x, t) g(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (\lambda T(f) + \mu T(g))(x) \end{aligned}$$

C'est ainsi que l'on peut conclure :

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$$

montrant la linéarité de T puis que T est un endomorphisme de E .

5. Regardons le noyau de T : Soit $f \in \ker T$. Alors $T(f) = 0$. Or $T(f)$ est la fonction F de la question 3. Puis en 3.3, $F'' = -f$. Ici, $F = 0$ d'où $F'' = 0 = -f$. Conclusion $f = 0$ et $\ker T = \{0\}$, ce qui implique que T est injective.

6. On pose $A = \{G \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\}$.

6.1 Soit $G \in \text{Im}(T)$. Par définition, il existe $f \in E$ tel que $G = T(f)$. Par 3.2 et 3.3, on obtient $G \in A$. Conclusion : $\text{Im}T \subset A$.

6.2 Soit $G \in A$. Posons $F = T(G'')$. Par 3.3, $F'' = -G''$. Donc, $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], F'(x) = -G'(x) + c$. En particulier, pour $x = 1$, $F'(1) = -G'(1) + c$. Par 3.(b) et définition de A , $c = 0$. Ainsi, $F' = -G'$. Donc, $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], F(x) = -G(x) + c$. En particulier, pour $x = 0$, $F(0) = -G(0) + c$. Par 3.2 et définition de A , $c = 0$. Conclusion : $F = -G$.

6.3 Par 6.1 $\text{Im}T \subset A$. Par 6.2, pour tout élément G de A , $G = T(-G'') \in \text{Im}T$, c'est-à-dire $A \subset \text{Im}T$. Conclusion : $\text{Im}T = A$.

7. Recherche des éléments propres de T

7.1 Soit λ une valeur propre de T

Puisque T est injective, $\lambda \neq 0$.

Supposons $\lambda < 0$: il existe $f \in E, f \neq 0, T(f) = \lambda f$. Si on pose $F = T(f)$, on sait par 3.3, F est C^2 sur $[0, 1]$ et $F'' = -f$. Puisque $f = \frac{1}{\lambda} F$, f est également C^2 sur $[0, 1]$ et $f'' = -\frac{1}{\lambda} f$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0$. Puisque $\lambda < 0$, par la question 1.1, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0, 1], f(x) = ae^{\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x} + be^{-\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x}$.

Par 3.2, $T(f)(0) = (T(f))'(1) = 0$. Or $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$. D'où $f(0) = 0$, ce qui donne $a + b = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f(x) = 2a \text{sh}\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x\right)$. Puis $f'(x) = 2a\sqrt{-\frac{1}{\lambda}} \text{ch}\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x\right)$. $f'(1) = 0$ implique $a = 0$ puisque ch ne s'annule pas.

En conclusion, on trouve $f = 0$ impossible avec la définition de vecteur propre. Ainsi, si λ est une valeur propre de T , elle est strictement positive.

7.2 Soit λ une valeur propre de T

Par la question précédente, on sait tout vecteur propre f associée est solution de l'équation différentielle $f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0$ avec $f(0) = f'(1) = 0$.

Par la question 1.1, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0, 1], f(x) = a \cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x\right)$.

$f(0) = 0$ implique $a = 0$. $f'(x) = b\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x\right)$. On doit avoir $f \neq 0$ et $f'(1) = 0 = b\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right)$. Ce qui impose $\cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) = 0$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}, \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

On en déduit que les valeurs propres de T sont de la forme : $\lambda_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

7.3 Par la question précédente, $E_{\lambda_k}(T) = \{f \in E / \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = b \sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}x\right)\} = \text{vect}(x \mapsto \sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}x\right))$. Ainsi, la dimension de $E_{\lambda_k}(T)$ est 1 et une base est $(x \mapsto \sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}x\right))$.

EXERCICE 3

1. On s'aperçoit que $m_{ij} = m_{ji}$. Ainsi, M est une matrice symétrique, à coefficients réels, alors par le théorème spectral, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = X X^T$.

2.1 $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $X^T \in \mathcal{M}_{1,n}$. Par propriété du produit matriciel, on obtient $U_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puis $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[U_X]_{i,j} = x_i x_j$. Ainsi, U_X est une matrice symétrique, à coefficients réels, alors par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2

$$U_X = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, chaque colonne de U_X est colinéaire à X . $X \neq 0$ puisque (X, Y) est une famille libre. Donc U_X est de rang 1 et $\text{Im}(U_X) = \text{vect}(X)$.

2.3 $\ker(U_X) = \{Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n) = 0\}$. Puisque $X \neq 0$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel

que $x_i \neq 0$. Ainsi $\ker(U_X) = \{Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} / x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n = 0\} = \{Z / (X|Z) = 0\} = (\text{vect}(X))^\perp$.

Or $\text{vect}(X) = \text{Im}(U_X)$. D'où le résultat demandé.

2.4 Par théorème du rang, on a $\dim \ker(U_X) + \dim \text{Im}(U_X) = \dim \mathbb{R}^n$.

Soit $Z \in \ker(U_X) \cap \text{Im}(U_X)$. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}$, $Z = aX$ puisque $Z \in \text{Im}(U_X)$. Puis $(Z|X) = 0$ car $Z \in \ker(U_X)$. D'où $a(X|X) = 0$. Or $X \neq 0 \implies (X|X) \neq 0$. Ainsi, $a = 0$ et $Z = 0$. Puis, $\ker(U_X) \cap \text{Im}(U_X) = \{0\}$. Nous avons les deux conditions montrant que $\ker(U_X)$ et $\text{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2.5 Calculons les coefficients de U_X^2 :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, [U_X^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n x_i x_k x_k x_j = x_i x_j \sum_{k=1}^n x_k^2 = \text{tr}(U_X)[U_X]_{ij}$$

Conclusion : $U_X^2 = \text{tr}(U_X) U_X$. Ainsi $P(X) = X^2 - \text{tr}(U_X)X$ est un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X . *Attention à ne pas confondre le vecteur X avec l'indéterminée du polynôme*

2.6 Une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \ker(U_X) \oplus \text{Im}(U_X)$ est une base du type (Z_1, \dots, Z_{n-1}, X) où (Z_1, \dots, Z_{n-1}) est une base de $\ker(U_X)$ et (X) base de $\text{Im}(U_X)$. Comme $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, U_X(Z_i) = 0$ et $U_X(X) = \text{tr}(U_X)X$, on obtient :

$$\text{Mat}_{(Z_1, \dots, Z_{n-1}, X)}(u_X) = \begin{array}{c|c} 0_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \text{tr}(U_X) \end{array}$$

Rappelons que $\text{tr}(U_X) = \sum_{k=1}^n x_k^2 = (X|X)$.

3. **Dans la cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.** On a $M = I_n + \alpha U_X$. Puisque $U_X = \text{Mat}_{(e_i)_i}(u_X)$ où $(e_i)_i$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n , U_X est semblable à la matrice D déterminée dans la question précédente. Ainsi,

$$U_X = PDP^{-1}. \text{ Alors } M = I_n + P\alpha DP^{-1} = P(I_n + \alpha D)P^{-1}. \text{ Or } I_n + \alpha D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + \alpha \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\text{Sp}(M) = \{1, 1 + \alpha(X|X)\}$ et M est semblable à la matrice diagonale $I_n + \alpha D$.

4. **On revient au cas général** et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelques que soient les valeurs de α et β .

- 4.1 On note $F = \text{vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice M .
- 4.1.1 $MX = (I_n + \alpha U_X + \beta U_Y)X = X + \alpha X X^\perp X + \beta Y Y^\perp X$. Or $X X^\perp X = X(X|X) = (X|X)X$ et $Y Y^\perp X = Y(Y|X) = (Y|X)Y$. Ainsi, $MX = (1 + \alpha(X|X))X + \beta(Y|X)Y$
- 4.1.2 Par la question précédente, $MX \in F$. Par analogie, $MY = Y + \alpha(X|Y)X + \beta(Y|Y)Y \in F$. (X, Y) étant une base de F , on en déduit que $\forall Z \in F, MZ \in F$. C'est-à-dire que F est stable par f .
- 4.2 M est symétrique et représente l'endomorphisme f dans la base canonique de \mathbb{R}^n qui est une b.o.n pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . Alors f est un endomorphisme autoadjoint de \mathbb{R}^n et par propriété du cours, si F est stable par f alors il en est de même pour F^\perp .
Soit $Z \in F^\perp$. $MZ = Z + \alpha X X^\perp Z + \beta Y Y^\perp Z = Z + \alpha(X|Z)X + \beta(Y|Z)Y = Z$ car $(X|Z) = (Y|Z) = 0$ puisque $Z \in (\text{vect}(X, Y))^\perp$. Ceci montre que $f_{F^\perp} = Id_{F^\perp}$.

4.3 On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & 1 + \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$

4.3.1 En 4.1, on a vu que $MX = (1 + \alpha(X|X))X + \beta(Y|X)Y$ et $MY = \alpha(X|Y)X + (1 + \beta(Y|Y))Y$. Or $MX = f(X)$ $f(Y) = MY$. On retrouve donc bien que $Mat_{(X,Y)}(f_F) = G$.

4.3.2 Soit $\mathcal{B} = (X, Y, \mathcal{B}_{F^\perp})$ une base adaptée à $F \oplus F^\perp$. Par les questions, 4.2 et 4.3.1, on en déduit

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c|c} G & O_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array}$$

4.3.3 On a $G = Mat(f_F)$. Or, f est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien (\mathbb{R}^n) et F est stable par f . Ainsi, f_F reste un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien (F) et par théorème spectral f_F est diagonalisable sur \mathbb{R} et donc G aussi, montrant en particulier que ses valeurs propres sont réelles.
Attention, G n'est pas symétrique car ce n'est pas une matrice de f_F dans une base orthonormée de F

4.3.4 Écrivons $G = I_2 + \begin{pmatrix} \alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de $H = \begin{pmatrix} \alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

Il suffira d'ajouter 1 pour déterminer celles de G .

$$\begin{aligned} \chi_H(\lambda) &= \lambda^2 - (\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)\lambda + \alpha\beta(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2) \\ &= (\lambda - \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)}{2})^2 - \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)^2}{4} + \alpha\beta(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2) \\ &= (\lambda - \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)}{2})^2 - \frac{1}{4}((\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)^2 - 4\alpha\beta\|X\|^2\|Y\|^2 + 4\alpha\beta(X|Y)^2) \\ &= (\lambda - \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)}{2})^2 - \frac{1}{4}(\alpha\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2 + 4\alpha\beta(X|Y)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de H sont alors,

$$\frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2 + 4\alpha\beta(X|Y)^2}$$

Celles de G :

$$1 + \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2 + 4\alpha\beta(X|Y)^2}$$

4.4 M est semblable à $M' = \begin{array}{c|c} G & O_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array}$ donc ces matrices ont mêmes valeurs propres.

On a par propriété sur les matrices par bloc, $\chi'_{M'}(\lambda) = \chi_G(\lambda)(\lambda - 1)^{n-2}$.

On en conclut que $Sp(M) = \{1, 1 + \frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2 + 4\alpha\beta(X|Y)^2}\}$.

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.

On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$.

1.1 Soit α un réel strictement positif.

1.1.1 Par le cours, $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$.

1.1.2 Posons $t = 1+h$, alors $t \rightarrow 1 \iff h \rightarrow 0$.

Puis $1-t^\alpha = 1 - (1+h)^\alpha = 1 - (1 + \alpha h + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)) = -\alpha h + o_{h \rightarrow 0}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\alpha h$.

Conclusion : $1-t^\alpha \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\alpha(t-1)$.

1.2 Soit β un réel. Énoncer En faisant un changement de variable $h = 1-t$, on se retrouve avec une intégrale de Riemann impropre en 0. Alors le cours énonce que $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta} dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

1.3 — $f : t \mapsto \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est continue sur $]0, 1[$.

— Au voisinage de 0, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ converge.

— Au voisinage de 1, $f(t) \sim \frac{-\frac{1}{n}(t-1)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}}$ (on a utilisé 1.1.2). Par 1.2 puisque $\frac{1}{n} < 1$ pour $n \geq 2$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ converge.

Conclusion : $\forall n \geq 2, \gamma_n$ existe.

2. Démonstration d'un encadrement.

2.1 - Faisons l'étude de $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t : \varphi$ est C^∞ sur \mathbb{R} . $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = e^t - 1$. On en déduit le tableau de variations de φ suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$		$\begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array}$	
$\varphi(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \geq 0$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t$.

- Pour tout réel t négatif, écrivons la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle à l'ordre 2 :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2} e^u du$$

Puisque $t \leq 0$ et $\forall u, \frac{(t-u)^2}{2} e^u \geq 0$, on obtient, $\int_0^t \frac{(t-u)^2}{2} e^u du \leq 0$. D'où $\forall t \leq 0, e^t \leq 1 + t + \frac{t^2}{2}$.

2.2 On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel $u : U_m = \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{k!}$.

Soit p un entier naturel non nul.

On suppose que : $\forall u \leq 0, U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}$.

2.2.1 *En toute logique, on devrait obtenir cette inégalité à partir de l'hypothèse précédente. Or $U_{2p+1} = U_{2p} + \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} \leq 0$ pour u négatif, mais cela ne nous donne pas l'inégalité voulue. Et $U_{2p+1} = U_{2p-1} + \frac{u^{2p}}{(2p)!} + \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} = U_{2p-1} + \frac{u^{2p}}{(2p)!} (1 + \frac{u}{2p+1})$ ne permet pas d'en déduire pour u négatif que $U_{2p+1} \leq U_{2p}$. Je propose une démonstration directe par la formule de Taylor avec reste intégral :*

$$\forall u \leq 0, e^u = U_{2p+1} + \int_0^u \frac{(u-t)^{2p+1}}{2p+1} e^t dt$$

. Pour $u \leq 0, \int_0^u \frac{(u-t)^{2p+1}}{2p+1} e^t dt = - \int_u^0 \frac{(u-t)^{2p+1}}{2p+1} e^t dt = \int_u^0 \frac{(t-u)^{2p+1}}{2p+1} e^t dt \geq 0$. Ainsi $e^u \geq U_{2p+1}$

2.2.2 Toujours par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall u \leq 0, e^u = U_{2p+2} + \int_0^u \frac{(u-t)^{2p+2}}{2p+2} e^t dt$$

. Pour $u \leq 0, \int_0^u \frac{(u-t)^{2p+2}}{2p+2} e^t dt = - \int_u^0 \frac{(u-t)^{2p}}{2p} e^t dt \leq 0$. Ainsi $e^u \leq U_{2p+2}$

2.3 D'après les questions précédentes, on attend probablement une récurrence pour montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall u \leq 0, U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}$$

— Initialisation pour $p = 1$: c'est la question 2.1

— On suppose pour $p \geq 1 : \forall u \leq 0, U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}$.

Les questions 2.2.1 et 2.2.2 montrent que la relation reste vraie au rang $p + 1$. cqfd

3. On pose $u = (\frac{1}{n} \ln(t))$. Puisque $t \in [0, 1]$, u est négatif et on applique l'encadrement précédent.

4. — $f : t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est continue sur $]0, 1[$.

- Au voisinage de 0, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t}f(t) = 0$ par croissance comparée. D'où $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{\sqrt{t}})$. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors par critère du $o()$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ converge.
- Au voisinage de 1, $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{(t-1)^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} = (-1)^p \frac{1}{(1-t)^{1-p+\frac{1}{n}}}$ car $\ln(t) \sim (t-1)$. Or $p \geq 1$ et $n \geq 2$ implique que $1 + \frac{1}{n} - p \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1$. Par 1.2 et critère d'équivalence sur les fonctions de signe constant (f est de signe de $(-1)^p$), $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ converge.

En conclusion, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ existe.

5. Écrivons l'encadrement de 3 pour $p = 1$:

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n} \ln(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \ln(t)\right)^2\right) \leq 1 - e^{\frac{1}{n} \ln(t)} \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{n} \ln(t)\right)$$

Ce qui donne :

$$-\frac{1}{n} \ln(t) - \frac{1}{2n^2} \ln^2(t) \leq 1 - e^{\frac{1}{n} \ln(t)} \leq -\frac{1}{n} \ln(t)$$

Puis comme $\forall t \in]0, 1[$, $(1-t)^{1+\frac{1}{n}} > 0$,

$$\frac{1}{n} \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} - \frac{1}{2n^2} \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \leq \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \ln(t) \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$$

Il reste à intégrer cet encadrement par rapport à t sur $[0, 1]$ pour trouver l'encadrement voulu.

6. Soit p un entier naturel non nul.

Il s'agit d'utiliser le théorème de convergence dominée : Posons, pour tout $n \geq 2$, $f_n : t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$.

H_1 $\forall n \geq 2$, f_n est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, 1[$.

H_2 $(f_n)_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $f : t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{1-t}$.

H_3 f est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, 1[$.

H_4 Pour $t \in]0, 1[$, $g_t : x \mapsto \frac{1}{(1-t)^x} = e^{-x \ln(1-t)}$ est croissante : en effet $g'_t(x) = -\ln(1-t)e^{-x \ln(1-t)} \geq 0$ puisque $(1-t) \in]0, 1[$ et $\ln(1-t) < 0$.

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$ et $g_t(1 + \frac{1}{n}) \leq g_t(1 + \frac{1}{2})$.

Alors, $\forall n \geq 2$, $\forall t \in]0, 1[$, $|f_n(t)| \leq \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{2}}}$.

$\varphi : t \mapsto \frac{|\ln^p(t)|}{(1-t)^{1+\frac{1}{2}}}$ est continue, positive, intégrable par la question 4.

Ceci termine la vérification des hypothèses du théorème de convergence dominée et permet d'en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt \right) = \int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{1-t} dt$$

7. Par l'encadrement de 5., on peut écrire :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt \leq n\gamma_n \leq \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$$

En utilisant la question précédente, puis le théorème d'encadrement, on peut énoncer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)} dt$$

8. — $f : t \mapsto -\ln(t)t^p$ est continue sur $]0, 1[$ et positive.

— Par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t}f(t) = 0$ ce qui nous permet d'écrire $f(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors par critère du $o()$, $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

9. Soit $p \in \mathbb{N}$, faisons une IPP en posant $u(t) = -\ln(t)$ et $v'(t) = t^p$, i.e $v(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1}$:

- u et v sont C^1 sur $]0, 1]$.
- $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t) = 0$ par croissance comparée.
- Alors, l'IPP est valide et on peut écrire :

$$\int_0^1 -\ln(t)t^p dt = \left[-\ln(t) \frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_{t \rightarrow 0}^1 + \int_0^1 \frac{t^p}{p+1} dt = 0 + \left[\frac{t^{p+1}}{(p+1)^2} \right]_0^1$$

Conclusion : $\int_0^1 -\ln(t)t^p dt = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Utilisons le développement en série entière : $\forall t \in]0, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p$.

Alors $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} -\ln(t)t^p dt$.

Il reste à utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

H_1 $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_p : t \mapsto -\ln(t)t^p$ est continue, intégrable sur $]0, 1[$ par 8.

H_2 $\sum_{p \geq 0} f_p$ converge simplement sur $]0, 1[$ (découle d'une série géométrique).

H_3 $t \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t) = \frac{-\ln(t)}{1-t}$ est continue sur $]0, 1[$.

H_4 $\sum_{p \geq 0} \int_0^1 |f_p(t)| dt = \sum_{p \geq 0} \int_0^1 -\ln(t)t^p dt = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)^2}$ est convergente en tant que série de Riemann où $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 -\ln(t)t^p dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}$$

11. La question 7 nous donne :

$$n\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)} dt + o(1)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)} dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$. D'où le résultat.