ENSAI, MP, 2002, Mathématiques II

(6 pages)

I-Résolution de l'équation différentielle de Bernoulli

1° a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation (1) est équivalente à $h'(x) = -\dfrac{h^2(x)+(x-1)h(x)}{x}$. Elle est donc de la forme $y' = f(x,y)$ avec $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -\dfrac{y^2+(x-1)y}{x}. \end{array}$

Or f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ donc, selon le théorème de Cauchy, pour tout $x_0 > 0$ il existe une unique solution maximale $\big(I, h\big)$ vérifiant $h(x_0) = 0$. Donc si h est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en $x_0 > 0$ et, comme la fonction nulle est clairement solution sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc maximale), on a $h = 0$. Soit, maintenant, h une solution de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ différente de la fonction nulle: elle ne s'annule donc pas et (1) donne $\forall x > 0,\ -\dfrac{h'(x)}{h^2(x)} = \dfrac{x-1}{x}\dfrac{1}{h(x)} + \dfrac{1}{x}$ soit, en posant $m(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ ce qui définit une fonction C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x > 0,\ m'(x) = \dfrac{x-1}{x}\, m(x) + \dfrac{1}{x}$.

Donc m vérifie l'équation linéaire (2) : $m' = \dfrac{x-1}{x}\, m + \dfrac{1}{x}$. L'équation homogène associée a pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ $m(x) = C\exp\big[x - \ln x\big] = C\,\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ et la méthode de variation de la constante conduit à $C'(x)\,\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \dfrac{1}{x}$ donc $C(x) = -\mathrm{e}^{-x} + K_1$ avec $K_1 \in \mathbb{R}$ et donc les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $m:\ x \longmapsto \dfrac{K_1\,\mathrm{e}^x - 1}{x}$ avec $K_1 \in \mathbb{R}$. De plus, comme $m = \dfrac{1}{h}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on doit avoir $\forall x > 0, K_1 \neq \mathrm{e}^{-x}$ donc $K_1 \notin]0,1[$.

Réciproquement, si $K_1 \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$, l'application $h:\ x \longmapsto \dfrac{x}{K_1\,\mathrm{e}^x - 1}$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xh'(x) + (x-1)h(x) = \dfrac{x\big[K_1\,\mathrm{e}^x - 1 - xK_1\,\mathrm{e}^x\big] + (x-1)x\big(K_1\,\mathrm{e}^x - 1\big)}{\big(K_1\,\mathrm{e}^x - 1\big)^2} = \dfrac{-x^2}{\big(K_1\,\mathrm{e}^x - 1\big)^2} = -h^2(x)$.

Donc <u>les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $h:\ x \longmapsto \dfrac{x}{K_1\,\mathrm{e}^x - 1}$ avec $K_1 \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$</u> .

b) De même, les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $h:\ x \longmapsto \dfrac{x}{K_2\,\mathrm{e}^x - 1}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ K_2 \neq \mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, <u>les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $h:\ x \longmapsto \dfrac{x}{K_2\,\mathrm{e}^x - 1}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}\backslash]1,+\infty[$</u> .

2° Si h est solution de (1) sur $\mathbb{R}$ alors h est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\exists\,(K_1,K_2) \in \big(\mathbb{R}\backslash]0,1[\big) \times]-\infty,1]$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{K_1\,\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{x}{K_2\,\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Si $K_1 \neq 1$, on a $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ et $h'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{1}{K_1 - 1}$ et, si $K_1 = 1$, on a, pour $x > 0$, $h(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{x}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ donc $h(0^+) = 1$ et $h'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$. On a des valeurs similaires en 0^- et donc $\big(K_1 \neq 1\big) \Leftrightarrow \big(K_2 \neq 1\big)$ et la dérivabilité en 0 donne $\dfrac{1}{K_1 - 1} = \dfrac{1}{K_2 - 1}$ donc $K_1 = K_2$ ce qui n'est possible que si $K_1 = K_2 \in]-\infty,0]$.

Réciproquement, si $C \leqslant 0$, $x \longmapsto \dfrac{x}{C\,\mathrm{e}^x - 1}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solution de (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par continuité, aussi sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 d'après le développement vu plus haut et solution de (1) sur $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$ et en 0.

Finalement, <u>les solutions de (1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $h:\ x \longmapsto -\dfrac{x}{C\,\mathrm{e}^x - 1}$ avec $C \in]-\infty,0] \cup 1$</u> .

II-Développement en série entière de la fonction de Bernoulli

1° ◇ Puisque $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i.\mathbb{Z}$ on a $\underline{D_f = \mathbb{C} \setminus 2\pi i.\mathbb{Z}}$.

◇ f est continue sur D_f puisque $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$ et $\forall z \in D_f,\ f(z) = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}} = \dfrac{1}{g(z)}$ où g est la somme d'une série entière qui converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc de rayon de convergence $+\infty$. En particulier, g est continue sur $\mathbb{C}$ et $g(0) = 1$ donc $f(z) \xrightarrow[z \neq 0]{z \to 0} 1$ et donc $\underline{f \text{ se prolonge par continuité en } 0}$.

2° a) Avec la notation introduite au [**1**], on a $\forall z \in D_f,\ f(z)g(z) = 1$ soit, par produit de Cauchy, pour tout $z \in U$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{(n-k+1)!}\right) z^n$ ce qui donne $b_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{(n-k+1)!} = 0$ soit $\underline{b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ b_n = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{b_k}{(n-k+1)!}}$.

b) La relation ci-dessus donne immédiatement $\underline{b_1 = -\frac{1}{2},\quad b_2 = \frac{1}{12},\quad b_3 = 0}$.

c) Montrons par récurrence sur n que $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant 1}$.

Le résultat est vrai pour $n = 0$ et si il est vrai jusqu'à $n-1$ $(n \geqslant 1)$, on a

$$|b_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k|}{(n-k+1)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p!} \leqslant \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!} = e - 2 \leqslant 1 \qquad \text{CQFD.}$$

d) Donc $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|b_n\, z^n\right| \leqslant \left|z^n\right|$ et la série majorante converge pour $|z| < 1$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$ converge pour $|z| < 1$ et donc $\underline{R \geqslant 1}$.

3° Posons $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$. S est définie sur D_R et on a, par le calcul fait au [**a**], $\forall z \in D_R,\ S(z)g(z) = 1$. Ceci montre que g ne s'annule pas sur D_R (en particulier, $R \leqslant 2\pi$) donc $D_R \subset D_f$ et qu'on a donc $\forall z \in D_R,\ S(z) = \dfrac{1}{g(z)} = f(z)$. Donc $\underline{f \text{ est développable en série entière sur } D_R}$.

4° On a $\forall z \in D_f,\ f(z) - b_1 z = \dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z}{2}\dfrac{e^z + 1}{e^z - 1} = \dfrac{z}{2}\dfrac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}$ et on remarque que cette fonction est paire. Or $\forall z \in D_R,\ f(z) = b_0 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n\, z^n$ donc $\underline{\forall p \geqslant 1,\ b_{2p+1} = 0}$.

5° D'après [**2.a**], $\forall n \geqslant 1,\ 0 = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b_k}{(n-k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{B_k}{k!\,(n-k+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+1}^k\, B_k$ ce qui donne $\underline{\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k\, B_k = 0}$.

III-Utilisation des nombres de Bernoulli : calcul de $\zeta(2n)$.

1° a) On a, par périodicité, $c(\pi) = c(-\pi)$ donc $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $c(-t) = c(t)$. Ainsi c est paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(c) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(c) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi c(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$. Or, pour $t \in [0,\pi]$, $2\,c(t)\cos(nt) = 2\cos(zt)\cos(nt) = \cos\big((n+z)t\big) + \cos\big((n-z)t\big)$ avec $n+z \neq 0$ et $n-z \neq 0$, puisque $z \notin \mathbb{Z}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(c) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\big((n+z)t\big) + \cos\big((n-z)t\big)\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\big((n+z)t\big)}{n+z} + \frac{\sin\big((n-z)t\big)}{n-z}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\big((n+z)\pi\big)}{n+z} + \frac{\sin\big((n-z)\pi\big)}{n-z}\right) = \frac{(-1)^n\sin(z\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z}\right)$$

donc la série de Fourier de c est $\dfrac{\sin(z\pi)}{\pi}\left(\dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\cos(nx)\right)$.

b) c est 2π-périodique et C^1 par morceaux. De plus $c(\pi^-) = c(\pi) = \cos(\pi z)$ et $c(\pi^+) = c((-\pi)^+) = \cos(-\pi z) = \cos(\pi z)$ donc c est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc, d'après le théorème de Dirichlet, c est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

c) c est 2π-périodique continue et C^1 par morceaux donc la série de Fourier de c converge normalement.

2° On a donc, en particulier, $c(\pi) = \cos(z\pi) = \dfrac{\sin(z\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\cos(n\pi)\right)$ d'où, comme $\sin(z\pi) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\quad \operatorname{cotan}(z\pi) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{z} + 2z\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}\right)$.

3° L'égalité ci-dessus donne $\forall z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\pi z\operatorname{cotan}(z\pi) = 1 + 2z^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$ et, au voisinage de 0, $\pi z\operatorname{cotan}(z\pi) = \pi z\dfrac{\cos(z\pi)}{\sin(z\pi)} \underset{0}{\sim} 1$ donc l'égalité est aussi vraie pour $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*$.
Soit $x \in]-\pi,\pi[$, posons $z = \frac{x}{\pi}$ (soit $x = \pi z$). On a $z \in]-1,1[$ donc $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*$ et alors l'égalité du [**2**] donne

$$x\operatorname{cotan}x = 1 + 2\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}}\frac{1}{\dfrac{x^2}{\pi^2}-n^2} = 1 - 2\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}}.$$

Mais $\forall n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right| < 1$ donc (série géométrique)

$$x\operatorname{cotan}x = 1 - 2\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{x^{2q}}{(n\pi)^{2q}}\right) = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{x^{2q+2}}{(n\pi)^{2q+2}}\right).$$

On a donc, en posant $p = q+1$, $x\operatorname{cotan}x = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}}\right)$. Posons donc $u_{n,p} = \dfrac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}}$.

On a $\forall (n,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $u_{n,p} \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p\geqslant 1}u_{n,p}$ converge de somme $\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p} = \dfrac{x^2}{(n\pi)^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}} = \dfrac{x^2}{(n\pi)^2-x^2} = T_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}T_n$ converge parce que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{\pi^2}\dfrac{1}{n^2}$ ou parce que sa convergence est donnée par le résultat du [**2**]. La famille $\left(u_{n,p}\right)_{(n,p)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2}$ est donc sommable et on peut intervertir les Σ et donc

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad x\operatorname{cotan}x = 1 - 2\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p}}\right) = 1 - 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{\pi^{2p}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}\right) = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi^{2p}}\zeta(2p)\,x^{2p}.$$

Ainsi $x\operatorname{cotan}x$ est développable en série entière sur $]-\pi,\pi[$.

4° Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $2ix \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $2ix \in D_f$ et on a vu au [**II.4**] que: $\forall z \in D_f,\ f(z) - b_1 z = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{z}{2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{z/2} + \mathrm{e}^{-z/2}}{\mathrm{e}^{z/2} - \mathrm{e}^{-z/2}}$ donc $f(2ix) + ix = ix\,\dfrac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}} = ix\,\dfrac{2\cos x}{2i\,\sin x}$ soit $\underline{\forall x \notin \pi\mathbb{Z},\ x\,\mathrm{cotan}\,x = f(2ix) + ix}$.

5° Pour $x \in]-r, r[$ avec $r = \mathrm{Min}\left(\frac{R}{2}, \pi\right) > 0$, on a donc $1 - \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{2}{\pi^{2p}}\,\zeta(2p)\,x^{2p} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n\,(2ix)^n$ donc, par unicité du développement en série entière, $\forall p \geqslant 1,\ -\dfrac{2}{\pi^{2p}}\,\zeta(2p) = \dfrac{B_{2p}}{(2p)!}\,2^{2p}\,(-1)^p$ donc $\underline{\forall p \geqslant 1,\ \zeta(2p) = (-1)^{p+1}\,\dfrac{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,B_{2p}}{(2p)!}}$.

IV-Utilisation des polynômes de Bernoulli.

1° $z \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ est développable en série entière sur D_R donc $\underline{z \mapsto F(z,t) \text{ est développable en série entière sur } D_R}$.

2° On a $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R},\quad F(z,t) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}\,z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_n}{n!}\,z^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{B_{n-k}}{(n-k)!k!}\,t^k\right) z^n$. On a donc bien $\underline{\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R},\quad F(z,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(t)}{n!}\,z^n \text{ avec } P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\,B_{n-k}\,t^k \in \mathbb{R}[t]}$.

3° Puisqu'on connaît b_k pour $k \in [\![1, 3]\!]$, on trouve sans difficulté:

$$\underline{P_0(t) = 1,\quad P_1(t) = t - \frac{1}{2},\quad P_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6},\quad P_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}\,t^2 + \frac{1}{2}\,t} \ .$$

4° On a $\forall z \in D_R,\ F(z,0) = f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_n}{n!}\,z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(0)}{n!}\,z^n$ donc, par unicité du développement en série entière, $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = B_n}$.

5° $\forall (z,t) \in C \times \mathbb{R},\quad F(z,t+1) - F(z,t) = \mathrm{e}^{z(t+1)}\,f(z) - \mathrm{e}^{zt}\,f(z) = \mathrm{e}^{zt}\left(\mathrm{e}^z - 1\right) f(z) = \mathrm{e}^{zt}\,z$ donc $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R},\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(t+1) - P_n(t)}{n!}\,z^n = z \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}\,z^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,z^n$.
Donc $\underline{\forall t \in \mathbb{R},\quad P_0(t+1) - P_0(t) = 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1,\quad P_n(t+1) - P_n(t) = n\,t^{n-1}}$.

6° Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad k^p = \dfrac{1}{p+1}\left(P_{n+1}(k+1) - P_{n+1}(k)\right)$ donc $\underline{S_p = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \dfrac{P_{n+1}(n+1) - P_{n+1}(1)}{p+1}}$.

7° $\forall (z,t) \in C \times \mathbb{R},\quad F(-z, 1-t) = \mathrm{e}^{-z(1-t)}\,f(-z) = \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{e}^{zt}\,\dfrac{-z}{\mathrm{e}^{-z} - 1} = \mathrm{e}^{zt}\,\dfrac{-z}{1 - \mathrm{e}^z} = F(z,t)$ donc $\forall (z,t) \in D_R \times \mathbb{R},\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(1-t)}{n!}\,(-1)^n\,z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n(t)}{n!}\,z^n$ donc $\underline{\forall t \in \mathbb{R},\quad P_n(1-t) = (-1)^n\,P_n(t)}$.

8° D'après [**2**], $P_n'(t)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^{k+1}\,B_{n-(k+1)}\,(k+1)\,t^k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\,B_{n-(k+1)}\,(k+1)\,t^k$
$=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\,B_{n-1-k}\,t^k=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^k\,B_{n-1-k}\,t^k$
soit $\underline{\forall n\geqslant 1,\ P_n'=P_{n-1}}$.

V-Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli.

1° $\diamond$ $\widehat{P}_n$ est continue sur $[0,1[$ et $\widehat{P}_n(0^+)=\widehat{P}_n(0)=P_n(0)$ tandis que $\widehat{P}_n(0^-)=\widehat{P}_n(1^-)=P_n(1)$ et, selon [**IV.5**], $P_n(1)-P_n(0)=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq 1\\ 1 & \text{si } n=1\end{cases}$. Donc $\widehat{P}_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf si $n=1$.

$\diamond$ Pour $x\in]-1,0[$ on a $x+1$ et $-x$ dans $]0,1[$ et donc, d'après [**IV.7**], $\widehat{P}_n(x)=\widehat{P}_n(x+1)=P_n(1-(-x))=(-1)^n\,P_n(-x)=(-1)^n\,\widehat{P}_n(-x)$. Ceci s'étend, par continuité à $[-1,0]$ si $n\neq 1$. Par contre, pour $n=1$, $\forall x\in]-1,0[,\ \widehat{P}_1(x)=-\widehat{P}_1(-x)$ mais $\widehat{P}_1(0)=-\frac{1}{2}\neq-\widehat{P}_1(0)$.

Donc si $n\neq 1$, $\widehat{P}_n$ a la parité de n et $\widehat{P}_1$ n'est ni paire, ni impaire .

2° D'après ci-dessus, $\widehat{P}_1$ coïncide sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ avec une fonction impaire donc $\forall k\in\mathbb{N},\ a_k(\widehat{P}_1)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_k(\widehat{P}_1)=2\displaystyle\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2k\pi\,t)\,\mathrm{d}t=2\left[-\frac{\cos(2k\pi\,t)}{2k\pi}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1+2\int_0^1\frac{\cos(2k\pi\,t)}{2k\pi}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{k\pi}$.

Ainsi la série de Fourier de $\widehat{P}_1$ est $\displaystyle -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k\pi\,x)}{k\pi}$.

3° On a $\forall x,\ \widehat{P}_0(x)=1$ donc $c_0(\widehat{P}_0)=1$ et $\forall k\in\mathbb{Z}^*,\ c_k(\widehat{P}_0)=0$. De plus, pour $k\in\mathbb{Z}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}c_k(\widehat{P}_n)&=\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{e}^{-2ik\pi\,t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-2ik\pi\,t}}{2ik\pi}\,P_n(t)\right]_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-2ik\pi\,t}}{2ik\pi}\,P_n'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{P_n(0)-P_n(1)}{2ik\pi}+\frac{n}{2ik\pi}\int_0^1\mathrm{e}^{2ik\pi\,t}\,P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{P_n(0)-P_n(1)}{2ik\pi}+n\,\frac{c_k(\widehat{P}_{n-1})}{2ik\pi}\end{aligned}$$

ce qui donne $c_k(\widehat{P}_1)=-\frac{1}{2ik\pi}$ (comme [**2**]) et, pour $n\geqslant 2$, $c_k(\widehat{P}_n)=n\,\dfrac{c_k(\widehat{P}_{n-1})}{2ik\pi}=n!\,\dfrac{c_k(\widehat{P}_1)}{(2ik\pi)^{n-1}}=-\dfrac{n!}{(2ik\pi)^n}$. Enfin, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $c_0(\widehat{P}_n)=\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\int_0^1 P_{n+1}'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{P_{n+1}(1)-P_{n+1}(0)}{n+1}=0$.

Donc $c_k(\widehat{P}_0)=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et, pour $n\geqslant 1$, $c_k(\widehat{P}_n)=\begin{cases}0 & \text{si } k=0\\ -\dfrac{n!}{(2ik\pi)^n} & \text{sinon}\end{cases}$.

4° Pour $p\geqslant 1$, $\widehat{P}_{2p}$ est continue, C^1 par morceaux et 1-périodique donc cette fonction est somme de sa série de Fourier. Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ \widehat{P}_{2p}(x)=-(2p)!\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{\mathrm{e}^{2ik\pi\,x}}{(2ik\pi)^{2p}}$.

En particulier, en $x=0$, on obtient $\widehat{P}_{2p}(0)=P_{2p}(0)=B_{2p}=-\dfrac{2\,(2p)!}{(-1)^p\,(2\pi)^{2p}}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^{2p}}$ ce qui donne bien $\forall p\geqslant 1,\ \zeta(2p)=(-1)^{p+1}\,\dfrac{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,B_{2p}}{(2p)!}$.

5° a) Pour $n \geqslant 2$, puisque $\widehat{P}_n$ est continue et C^1 par morceaux, la série de Fourier de $\widehat{P}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a donc

$$\forall x \in [0,1[, \quad |P_n(x)| = |\widehat{P}_n(x)| = \left| -\frac{n!}{(2i\pi)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi x}}{k^n} \right| \leqslant 2\, \frac{n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \ .$$

Mais, pour $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ce qui donne $\forall x \in [0,1[,\ |P_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{3}\, \frac{n!}{(2\pi)^n}$.
Pour $n = 0$, $\forall x \in [0,1[,\ |P_0(x)| = 1 \leqslant \frac{\pi^2}{3}$.
Pour $n = 1$, $\forall x \in [0,1[,\ |P_1(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} = \pi\, \frac{1!}{2\pi} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\, \frac{1!}{2\pi}$ car $1 \leqslant \frac{\pi}{3}$.
Finalement, $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad |P_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{3}\, \frac{n!}{(2\pi)^n}}$.

b) En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|B_n| = |P_n(0)| \leqslant \frac{\pi^2}{3}\, \frac{n!}{(2\pi)^n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|b_n\,(2\pi)^n\right| \leqslant \frac{\pi^2}{3}$ et donc la suite $\left(b_n\,(2\pi)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ce qui montre que $R \geqslant 2\pi$. Or on avait fait la remarque au [**II.3**] qu'on avait $R \leqslant 2\pi$. Donc $\underline{R = 2\pi}$.

6° $\diamond$ Si $n = 0$, on a $\left[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p\right](x) = \int_0^1 \widehat{P}_p(t)\,\mathrm{d}t = c_0(\widehat{P}_p) = \delta_{0,p}$. Si $p = 0$, $\left[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p\right](x) = \int_0^1 \widehat{P}_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} \widehat{P}_n(u)\,\mathrm{d}u = c_0(\widehat{P}_n) = \delta_{0,n}$.

$\diamond$ Supposons maintenant $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ et soit $x \in]0,1[$ fixé. Posons $Q_n(t) = \overline{\widehat{P}_n(x-t)}$, Q_n est continue par morceaux et 1-périodique et on a, en utilisant la formule admise (conséquence du théorème de Parseval), :

$$\left[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p\right](x) = \int_0^1 \overline{Q_n(t)}\widehat{P}_p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(Q_n)}\, c_k(\widehat{P}_p) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \overline{c_k(Q_n)}\, \frac{p!}{(2ik\pi)^p} \ .$$

Or

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(Q_n) &= \int_0^1 \overline{\widehat{P}_n(x-t)}\,\mathrm{e}^{-2ik\pi t}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{x-1} \overline{\widehat{P}_n(u)}\,\mathrm{e}^{-2ik\pi\,(x-u)}\,\mathrm{d}u \quad (u = x-t)\\
&= \int_0^1 \overline{\widehat{P}_n(u)}\,\mathrm{e}^{-2ik\pi\,(x-u)}\,\mathrm{d}u \quad \text{(intégrale sur une période)}\\
&= \mathrm{e}^{-2ik\pi x} \int_0^1 \overline{\widehat{P}_n(u)}\,\mathrm{e}^{2ik\pi u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-2ik\pi x}\, \overline{\int_0^1 \widehat{P}_n(u)\,\mathrm{e}^{-2ik\pi u}\,\mathrm{d}u}\\
&= \mathrm{e}^{-2ik\pi x}\, \overline{c_k(\widehat{P}_n)} = -\mathrm{e}^{-2ik\pi x}\, \frac{n!}{(-2ik\pi)^n}\, \delta_{0,k} \ .
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\left[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p\right](x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \overline{\mathrm{e}^{-2ik\pi x}\, \frac{n!}{(-2ik\pi)^n}}\, \frac{p!}{(2ik\pi)^p} = \frac{n!p!}{(n+p)!} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{(n+p)!}{(2ik\pi)^{n+p}}\, \mathrm{e}^{2ik\pi x}$$

et on reconnait ci-dessus la série de Fourier de $\widehat{P}_{n+p}$ dont la somme est $\widehat{P}_{n+p}$, puisque $n + p \geqslant 2$.

Finalement, on a $\underline{\forall x \in]0,1[, \quad \left[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p\right](x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p = 0\\ 0 & \text{si } (n = 0 \text{ et } p \neq 0) \text{ ou } (p = 0 \text{ et } n \neq 0)\\ \frac{1}{\mathrm{C}_{n+p}^{p}}\, \widehat{P}_{n+p}(x) & \text{si } n \neq 0 \text{ et } p \neq 0 \end{cases}}$

* * *
* *
*