• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A\,[i,j]$ le coefficient de A dont l'indice de ligne est égal à i et l'indice de colonne est égal à j.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur v est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée d. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbf{E}$, on a donc $d(u,v) = \|u - v\|$.

$\mathbf{E}$ est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{E} \mid \|v\| = 1\}$$

On note $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ l'application identique de $\mathbf{E}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{E})$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de $\mathbf{E}$.

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$, on note $f\,g$ au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de g et de f.

On rappelle que :

- Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1.
- Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$.
- D étant une droite vectorielle de **E,** on appelle demi-tour d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D ; il s'agit d'une rotation vectorielle.
- $\mathcal{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de $\mathbf{E}$ associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

2. Ensembles dénombrables

On rappelle que :

- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3. Partitions

Soit A un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A constitue une partition de A si :

(i) Aucun des sous-ensembles A_i n'est vide.

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

(iii) $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement, g étant un élément de $\mathbf{G}$, l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$: $h \to g\,h$ est bijective. Si $\mathbf{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on note

$$g\,\mathbf{H} = \{g\,h \mid h \in \mathbf{H}\}$$

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant S; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de $\mathbf{G}$ qui contiennent S.

5. Déplacements

On note $\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathbf{E}$ lorsque ce dernier est muni de sa sructure canonique d'espace affine euclidien sur lui même. On rappelle que $(\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})\,,\circ)$ est un groupe.

Préliminaires

Soit Ω un ensemble quelconque non vide. A et B étant deux sous-ensembles de Ω, on note $A \setminus B$ l'intersection de A et du complémentaire de B ; en d'autres termes :

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$\mathfrak{S}\,(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de Ω sur lui-même.

Soit f appartenant à $\mathfrak{S}\,(\Omega)$; si A est un sous-ensemble de Ω, on note $f(A)$ le sous-ensemble de Ω dont les éléments sont les images des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in \Omega \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$

On rappelle que :

(i) $f\,(A) = \emptyset$ *si et seulement si* $A = \emptyset$.

(ii) Si A *et* B *sont deux sous-ensembles de* X, *on a :*

$$A \subset B \Leftrightarrow f\,(A) \subset f\,(B)\,.$$

(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque de sous-ensembles de* X *indexée par l'ensemble* I, *on a :*

$$f\left(\bigcup\nolimits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\nolimits_{i\in I} f\,(A_i)$$

(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque de sous-ensembles de* X *indexée par l'ensemble* I, *on a :*

$$f\left(\bigcap\nolimits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\nolimits_{i\in I} f\,(A_i)$$

(v) Si A *et* B *sont deux sous-ensembles de* X, *on a :*

$$f\,(A \setminus B) = f\,(A) \setminus f\,(B)$$

1. Démontrer les propriétés *(iv)* et *(v)*.

2. Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de Ω

Partie I : quelques propriétés des rotations de l espace $\mathbf{E}$

1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$.

a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe.

Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$.

b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2 orthogonaux. Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$ et déterminer cette rotation.

2. Réciproque :

Soit ρ une rotation vectorielle distincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, d'axe $D = \mathbb{R}\omega$ où $||\omega|| = 1$.

a) Soit Δ une droite vectorielle distincte de D et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que D et Δ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.

b) Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ dont les axes respectifs D_1 et D_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$, alors D_1 est une droite invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments ρ_1, ρ_2 de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$).

Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par ρ_1 et ρ_2.

3. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont les rotations d'angles respectifs α_1, α_2 autour de la droite D dirigée et orientée par le vecteur unitaire ω.

a) On note $\mathbf{H} = \{\rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2} \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où x, y, z sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un *unique* couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2}$.

4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux . Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

5. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

a) Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_\mathbf{E}\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n[\,,\ s_i \neq s_{i+1} \tag{1}$$

Cette décomposition n'est en général pas unique (si ρ_1 est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.

Partie II : Étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

I_3, R et T sont les matrices de $\mathcal{SO}(3)$ définies par :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ρ et τ sont les rotations de $\mathbf{E}$ de *matrices respectives R, T dans la base $\mathcal{B}$.*

$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$ engendré par $\{R, T\}$. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.

On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où p et q sont des entiers relatifs, signifie que 5 divise $q - p$.

1. Pour tout entier *relatif* n, on pose

$$a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha) \text{ et } b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha)$$

a) Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$$

b) Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n$$

c) Prouver que pour tout entier *relatif* n, a_n et b_n sont des entiers relatifs.

d) Montrer que si n est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

e) Montrer que si n est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$.

Montrer que si n est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

2. *On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple (i, j)* de $[1, 3]^2$, on a :

$$M[i, j] \equiv M'[i, j] \bmod 5$$

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

a) Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

b) Démontrer que pour tout entier k, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ 5^{|k|}R^k \equiv \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \varepsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \varepsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

Existe-t-il un entier relatif k différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

c) Démontrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*2},\ 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

d) Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

e) En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \tag{2}$$

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3 \tag{3}$$

3. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \tag{4}$$

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \tag{5}$$

4. Conclure que pour tout g appartenant à $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$, il existe de *façon unique* un entier n strictement positif, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*\,n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1],\ s_i \neq s_{i+1}$$

On appelle terme de tête de g l'élément s_1 lorsque $a_1 > 0$ et s_1^{-1} lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.

5. Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

6. Pour tout élément σ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

a) Vérifier que

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\} \cup L(\rho) \cup L(\rho^{-1}) \cup L(\tau) \cup L(\tau^{-1})$$

et que l'obtient ainsi une partition de $\mathbf{G}$.

b) Vérifier que :

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L(\tau^{-1})$$

et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$.

De la même manière on a

$$\begin{aligned}
&L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1}L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1}L(\tau) \cup \rho^{-1}L\left(\tau^{-1}\right)\\
&L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L\left(\rho^{-1}\right)\\
&L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1}L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1}L(\rho) \cup \tau^{-1}L\left(\rho^{-1}\right)
\end{aligned}$$

On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.

c) En déduire que

$$\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\tau) \cup \tau L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de **G.**

Partie III : Étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. **G** est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$.

On considère l'ensemble

$$F = \{v \in \mathbf{S}^2 \ \mid \ \exists\, g \in \mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\},\ g(v) = v\}$$

et son complémentaire dans $\mathbf{S}^2$, soit $X = \mathbf{S}^2 \setminus F$.

1. Démontrer que l'ensemble F est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. En déduire que X n'est pas vide.

2. Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

3. Démontrer que si g et h sont deux éléments de **G** tels qu'il existe v appartenant à X vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

4. a) Démontrer que pour tout g appartenant à **G,** la restriction de g à X induit une bijection de X sur lui-même que l'on notera g_X.

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \to & \mathfrak{S}(X) \\ g & \mapsto & g_X \end{array}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier **G** à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

5. On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur X par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G},\ a = g(b)$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de X. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble M de X dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.

6. Prouver que la famille $(g(M))_{g \in \mathbf{G}}$ constitue une partition de X.

7. On pose

$$X_0 = M,\ X_1 = \bigcup_{g \in L(\rho)} g(M),\ X_2 = \bigcup_{g \in L(\tau)} g(M),\ X_3 = \bigcup_{g \in L(\rho^{-1})} g(M),\ X_4 = \bigcup_{g \in L(\tau^{-1})} g(M)$$

a) Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de X.

b) Prouver que

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset \tag{6}$$

$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset \tag{7}$$

8. On note $\Lambda = \{(u, v) \in F \times F \mid u \neq v\}$.

a) Vérifier que Λ est un ensemble dénombrable.

b) Si $(u, v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \{w \in \mathbf{S}^2 \mid \|w - u\| = \|w - v\|\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble?

c) Soit $\Gamma = \bigcup\limits_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans $\mathbf{S}^2$.

Indication : on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur $\mathbf{S}^2$ qui ne soit pas centré à l'origine.

d) Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$$

e) Soit (u, v) appartenant à $F \times F$. Montrer que pour tout entier k strictement positif, $r^k(u)$ est différent de v. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$.

En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$$

f) On pose

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \text{ et } Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y$$

g) Démontrer que

$$r\,(Y) \cap Z = \emptyset \text{ et } \mathbf{S}^2 \setminus F = r\,(Y) \cup Z$$

Partie IV : Équidécomposabilité

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{E}$. *On dit que A est équidécomposable à B s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de* $\mathbf{E}$ *telles que*

$$\forall i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini I). *On écrira alors $A \sim B$.*

1. Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que $\mathbf{S}^2$ est équidécomposable à $\mathbf{S}^2 \setminus F$

2. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset,\quad A_1 \sim B_1,\quad A_2 \sim B_2$$

a) Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

b) Généraliser.

3. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$.

Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $\left(A'_j\right)_{j\in J}$ sont deux partitions de A, et que si l'on pose

$$K = \left\{(i, j) \in I \times J \mid A_i \cap A'_j \neq \emptyset\right\}$$

alors la famille $\left(A_i \cap A'_j\right)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de A.

4. On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection ψ de A sur B telle que pour tout sous-ensemble non vide C de A, on ait :

$$C \sim \psi\,(C)$$

Soient A et *B deux sous-ensembles non vides de* **E**. *On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide B' de B tel que $A \sim B'$. En particulier, si $A \sim B$, alors $A \preccurlyeq B$.*

La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de **E**. *Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si A et B sont des sous-ensembles non vides de X tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.*

On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :

Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de E tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.

Partie V : ensembles paradoxaux

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

Un sous-ensemble A de **E** est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides B, C de A tels que

$$B \sim A, \quad C \sim A \quad \text{et} \quad B \cap C = \emptyset \tag{8}$$

1. Les notations étant celles de la partie III, vérifier que X est paradoxal.

2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de **E** telles que $A \sim B$. Démontrer que si A est paradoxal, alors il en est de même de B.
On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

3. Soit A un sous-ensemble paradoxal de **E**, B, C deux sous-ensembles de A non vides vérifiant les relations (8).

a) En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \setminus C) \sim A$.

b) En déduire qu'il existe une partition (A_1, A_2) de A telle que :

$$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A$$

4. Démontrer que $\mathbf{S}^2$ est paradoxal.

5. En déduire que si Σ_1 et Σ_1 sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$\mathbf{S}^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$