

I. Produit de convolution.

I.A - Généralités.

I.A.1) a) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ il vient que, en notant $\varphi_x(t) = f(t)g(x-t)$, on a $|\varphi_x(t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|$ pour tout réel x , ce qui prouve que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \times \|g\|_\infty$ $\square$

b) Si $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $t \mapsto g_x(t) \stackrel{\text{DEF}}{=} g(x-t)$ et $\|g_x\|_2 = \|g\|_2$ par le changement de variable $t \mapsto x-t$ admissible car $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ étant un élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'inégalité de Schwarz dans l'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\mathcal{L}^2$ montre alors que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \times \|g\|_2$ $\square$

I.A.2) Immédiat par le changement $t \mapsto u = x - t$ admissible car $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même. $\square$

I.A.2) Supposons f et g à support compact inclus respectivement dans $[-A, A]$ et $[-B, B]$.

$$\text{Alors } f * g(x) = \int_{-A}^A f(t)g(x-t) dt.$$

Or pour $t \in [-A, A]$ si $|x| > A + B$ on a $|x - t| > B$ donc $g(x - t) = 0$.

Il en découle que $f * g$ est à support compact inclus dans $[-(A+B), A+B]$ $\square$

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) h est par définition uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ donné quelconque il existe $\beta > 0$ tel que $|h(x) - h(x - \alpha)| \leq \varepsilon$ pour tout réel x dès que $|\alpha| \leq \beta$ c'est à dire $\|h - T_\alpha(h)\|_\infty \leq \varepsilon$ dès que $|\alpha| \leq \beta$. En d'autres termes si et seulement si $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|h - T_\alpha(h)\|_\infty = 0$ $\square$

I.B.2) Comme noté en I.A.1.b), si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $T_\alpha(f)$ et ainsi $T_\alpha(f) * g$ est bien définie. La changement de variable $t \mapsto u = t - \alpha$ prouve alors que $T_\alpha(f * g) = T_\alpha(f) * g$ $\square$

I.B.3) Comme $T_\alpha(f)$, f et g appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, la question I.A.1.b) fournit alors :

$$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty = \|T_\alpha(f) * g - f * g\|_\infty = \|(T_\alpha(f) - f) * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2 \quad \square$$

I.B.4) Soient f à support compact inclus dans $[-A, A]$ (ce qui implique $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$) et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

f et $T_\alpha(f)$ sont alors toutes deux nulles en dehors de $[-A - |\alpha|, A + |\alpha|]$ donc

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \int_{-A-|\alpha|}^{A+|\alpha|} |f(t-\alpha) - f(t)|^2 dt = \int_{-A-1}^{A+1} |f(t-\alpha) - f(t)|^2 dt \text{ pour } |\alpha| \leq 1$$

Or classiquement si f est continue à support compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe $\beta > 0$ tel que $|f(t-\alpha) - f(t)| \leq \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \beta$ et tout $t \in \mathbb{R}$

Il en découle que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leq \sqrt{2(A+1)} \times \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \min(1, \beta)$ i.e. $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$

Des questions I.B.1. et I.B.3. on en déduit que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.B.5) Soient désormais f et g deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Pour montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il suffit, comme dans la question précédente, d'établir que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$.

• Compte-tenu de la question précédente, il suffit d'établir que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. En effet supposons que ce soit le cas et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque.

Il existe alors φ continue à support compact telle que $\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$ et on a alors

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(f) - f\|_2 &\leq \|T_\alpha(f) - T_\alpha(\varphi)\|_2 + \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &= \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\|\varphi - f\|_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\leq \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\varepsilon \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or puisque φ est continue à support compact, d'après la démonstration de la question précédente il existe $\beta > 0$ tel que $\|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 \leq \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \beta$

Ainsi $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leq 3\varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \beta$ ce qui prouve que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0$ et établit donc le résultat. $\square$

• Reste à prouver que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et pour n entier non nul soit un réel $\alpha_n > 0$ choisi de sorte que

$$\sqrt{\alpha_n} |f(-n)| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \sqrt{\alpha_n} |f(n)| \leq \frac{1}{n}.$$

Soit alors la fonction f_n continue à support compact définie par $f_n(t) = f(t)$ pour $t \in [-n, n]$, $f_n(t) = 0$ pour $|t| \geq n + \alpha_n$ et f_n affine sur $[-n - \alpha_n, -n]$ et sur $[n, n + \alpha_n]$

$$\text{On a } \|f - f_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R} \setminus [-n - \alpha_n, n + \alpha_n]} |f|^2 + \int_{-n - \alpha_n}^{-n} |f - f_n|^2 + \int_n^{n + \alpha_n} |f - f_n|^2 \stackrel{\text{DEF}}{=} I_n + J_n + K_n$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il existe N_0 tel que $\int_{\mathbb{R} \setminus [-N_0, N_0]} |f|^2 \leq \varepsilon$. Donc

$$\|f - f_n\|_2^2 \leq \varepsilon + J_n + K_n \quad \forall n \geq N_0$$

En outre $\sqrt{K_n} \leq \sqrt{\int_{[n, n+\alpha_n]} |f|^2} + \sqrt{\int_{[n, n+\alpha_n]} |f_n|^2} \stackrel{\text{DEF}}{=} a_n + b_n$ par l'inégalité de Minkowski.

Or $a_n \leq \sqrt{\varepsilon}$ pour $n \geq N_0$ et comme f_n est affine entre n et $n + \alpha_n$, égale à $|f(n)|$ en n et nulle en $n + \alpha_n$ on a $|f_n(t)| \leq |f(n)|$ pour $t \in [n, n + \alpha_n]$. Donc $b_n \leq \sqrt{\alpha_n} |f(n)| \leq \frac{1}{n} \leq \sqrt{\varepsilon}$ pour $n \geq N_1$

Ainsi $K_n \leq 4\varepsilon$ pour $n \geq \max(N_0, N_1)$. De même J_n .

Finalement $\|f - f_n\|_2^2 \leq 9\varepsilon$ pour $n \geq \max(N_0, N_1)$ ce qui établit le résultat. $\square$

I.C - Continuité, dérivabilité, séries de Fourier.

I.C.1) Supposons que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

a) 1/ $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue (donc a fortiori par morceaux) sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2/ $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3/ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty \times |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui établit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

b) Supposons désormais en outre g uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque.

Il existe $\beta > 0$ tel que $|g(u + \alpha) - g(u)| \leq \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \beta$ et tout $u \in \mathbb{R}$.

Il en résulte que $|(f * g)(x + \alpha) - (f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \times \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq \beta$ et tout $x \in \mathbb{R}$ i.e. $f * g$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.C.2) Avec les hypothèses de l'énoncé il vient (outre I.C.1.a) en notant $\varphi(x, t) = f(t)g(x-t)$ que

$\frac{\partial^\ell \varphi}{\partial x^\ell}(x, t) = f(t)g^{(\ell)}(x-t)$ existe et vérifie les mêmes trois hypothèses que dans la question I.C.1.a) pour $\ell \leq k$

Il en résulte que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que $(f * g)^{(k)} \equiv f * g^{(k)}$ $\square$

I.C.3)a) La série de Fourier d'une telle fonction h converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers h .

b) Commençons par remarquer que comme g est continue et périodique, elle est bornée et donc $f * g$ existe bien, est continue (I.C.1.a) et est clairement 2π -périodique.

D'après le a), $g(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{inu}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et en outre $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)|$ converge.

Donc $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) \right) dt$ avec $u_n(t) = c_n(g) f(t) e^{in(x-t)}$.

Or $\int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| dt \leq \|f\|_1 \times |c_n(g)|$ donc $\sum \int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| dt$ converge de sorte que d'après le théorème de convergence

$\mathcal{L}^1$ on a $(f * g)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}$ avec $\alpha_n = c_n(g) \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt$

On a là un développement en série trigonométrique de $f * g$ qui converge normalement (car $|\alpha_n| \leq \|f\|_1 \times |c_n(g)|$) donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Or classiquement si une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors c'est le développement en série de Fourier de sa somme (par intégration terme à terme).

Ainsi $f * g$ est égale à la somme de sa série de Fourier et $c_n(f * g) = c_n(g) \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt = c_n(g) \hat{f}(n)$ $\square$

I.D - Approximation de l'unité.

I.D.1) Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque et soit x fixé. Comme f est continue en particulier en x :

il existe $\alpha = \alpha(x)$ tel que $\sup_{t \in [-\alpha, \alpha]} |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $|t| \leq \alpha$

Et il existe N_0 tel que $\int_{-\infty}^{-\alpha} \delta_n \leq \varepsilon$ et $\int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_0$.

En remarquant que $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_n(t) dt$ et $f * \delta_n = \delta_n * f$ il vient :

$$\Delta_n(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} |(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x, t) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x, t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt$$

avec $\varphi_n(x, t) = |f(x-t) - f(x)| \delta_n(t)$.

Or $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x, t) dt \leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) dt = \varepsilon$. Donc :

$$\Delta_n(x) \leq \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x, t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} \delta_n(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n(t) dt \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où il résulte que $\Delta_n(x) \leq (4\|f\|_\infty + 1)\varepsilon$ pour $n \geq N_0$
ce qui établit bien la convergence simple de la suite $(f * \delta_n)$ vers f sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.D.2) Si f est en outre à support compact, classiquement elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ de sorte que le α de la question précédente ne dépend pas de x . La démonstration de la question précédente prouve alors que $\Delta_n(x) \leq (4\|f\|_\infty + 1)\varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
En d'autres termes la suite $(f * \delta_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f . $\square$

I.D.3) a) h_n est clairement continue, positive et vérifie $\int_{\mathbb{R}} h_n = 1$.

Remarquons que $\lambda_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 (1-t^2)^n t dt = \int_0^1 (1-u)^n du = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}$

Soit désormais $\alpha > 0$ donné quelconque. Il vient

$$I_n(\alpha) \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_{\alpha}^{+\infty} h_n(t) dt = 0 \text{ si } \alpha \geq 1 \text{ et sinon } I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 h_n(t) dt \leq \frac{(1-\alpha^2)^n}{\lambda_n} \leq (n+1)(1-\alpha^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De même $\int_{-\infty}^{-\alpha} h_n = I_n(\alpha)$. Donc la suite (h_n) est bien une approximation de l'unité. $\square$

b) Si f est continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ il résulte de la question I.A.3) que $f * h_n$ est à support inclus dans $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. $\square$

Pour tout x on a $(f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h_n(x-t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)h_n(x-t) dt$.

Si en outre $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ on a $x-t \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc $h_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n$ de sorte

que $(f * h_n)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)(1-(x-t)^2)^n dt$ qui par développement est clairement une fonction polynomiale en x et établit donc le résultat. $\square$

c) Soit φ une fonction définie et continue sur $[a, b]$ puis soit ψ continue sur $\mathbb{R}$ à support compact qui coïncide avec φ sur $[a, b]$, est nulle sur $]-\infty, a-1]$ et $[b+1, +\infty[$ et est affine sur $[a-1, a]$ et $[b, b+1]$.

Soit enfin f définie par $f(x) = \psi\left(a-1+(b-a+2)\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$. Elle est continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

D'après I.D.2) la suite $(f * h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ vers f .

Or d'après la partie b) ci-dessus $f * h_n$ est polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ainsi il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Alors classiquement (changement de variable affine) la suite de fonctions polynomiales (Q_n) définie par $Q_n(x) = P_n\left(-\frac{1}{2} + \frac{x-a+1}{b-a+2}\right)$ converge uniformément vers ψ sur $[a-1, b+1]$ donc a fortiori converge uniformément vers φ sur $[a, b]$. $\square$

I.D.4) Supposons qu'il existe une telle fonction g . On a en particulier $h_n * g = h_n$ pour tout entier n . Or d'après I.D.1) la suite $(h_n * g)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g puisque la suite (h_n) est une approximation de l'unité. Ainsi la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g .

Or $h_n(0) = \frac{1}{\lambda_n}$ et $\lambda_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée (la suite $g_n(t) = (1-t^2)^n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle et y est dominée par la fonction constante égale à 1 bien intégrable sur $]0, 1[$).

Ainsi la suite $(h_n(0))$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ ce qui est contradictoire avec le fait que la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Donc une telle fonction g n'existe pas. $\square$

II. Transformée de Fourier.

II.A. -1/ $x \mapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2/ $t \mapsto f(t)e^{ixt}$ est continue donc a fortiori continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

3/ $|f(t)e^{ixt}| \leq |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée par $\|f\|_1$ $\square$

II.B. - Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

II.B.1) a) On commence par noter que, comme $g \in \mathcal{C}_b$, $f * g$ est bien définie et continue par la question I.C.1.a)

- Pour prouver que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ il suffit de prouver qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout réel $A > 0$ on ait $\int_{-A}^A |(f * g)(x)| dx \leq M$.

Soient la fonction φ définie par $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)| dt$, la suite (φ_n) définie par $\varphi_n(x) = \int_{-n}^n |f(t)g(x-t)| dt$ ainsi que $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ donnés quelconques.

Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ il existe N_0 tel que $\int_{-\infty}^{-n} |f| \leq \varepsilon$ et $\int_n^{+\infty} |f| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N_0$. Il en découle que

$$\int_{-\infty}^{-n} |f(t)g(x-t)| dt \leq \|g\|_{\infty} \times \varepsilon \text{ et } \int_n^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \leq \|g\|_{\infty} \times \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq 2\|g\|_{\infty} \times \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ i.e. la suite (φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ .

Donc $\int_{-A}^A \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \varphi \quad (1)$

Or $\int_{-A}^A \varphi_n = \int_{-A}^A \left(\int_{-n}^n |f(t)g(x-t)| dt \right) dx = \int_{-n}^n \left(|f(t)| \int_{-A}^A |g(x-t)| dx \right) dt$

par le théorème de Fubini sur un rectangle bien licite puisque $(x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue.

Donc $\int_{-A}^A \varphi_n \leq \int_{-n}^n \left(|f(t)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| dx \right) dt = \|g\|_1 \int_{-n}^n |f(t)| dt \leq \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|g\|_1 \times \|f\|_1$

De (1) on tire alors $\int_{-A}^A \varphi \leq \|g\|_1 \times \|f\|_1$ et par ailleurs on a $|(f * g)(x)| \leq \varphi(x)$.

Donc $\int_{-A}^A |(f * g)(x)| dx \leq \|f\|_1 \times \|g\|_1$ pour tout $A > 0$ ce qui établit bien l'intégrabilité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

En d'autres termes l'intégrale imbriquée $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \right) dx$ existe.

- Au cours de la démonstration ci-dessus, on a établi au passage que si K et L sont deux segments inclus dans $\mathbb{R}$ on a $\iint_{K \times L} |f(t)g(x-t)| dx dt \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ce qui prouve que $(x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le théorème de Fubini prouve alors que

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx \quad (2)$$

- Par ailleurs $\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx = f(t) \int_{\mathbb{R}} g(x-t) dx = f(t) \int_{\mathbb{R}} g$ donc l'autre intégrale imbriquée

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx \right) dt \text{ a un sens et } \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g \times \int_{\mathbb{R}} f$$

Toujours par le théorème de Fubini il vient $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} g \times \int_{\mathbb{R}} f$

De (2) on déduit $\int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g \quad \square$

b) Soit u un réel fixé quelconque et soient f_1 et g_1 les fonctions définies par $f_1(t) = f(t)e^{-iut}$ et $g_1(t) = e^{-iut}$. Elles appartiennent bien à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et g_1 est bornée. On peut donc appliquer la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{\mathbb{R}} f_1 * g_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iut}g(x-t)e^{-iu(x-t)} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)e^{-iux} dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \right) e^{-iux} dx = \widehat{(f * g)}(u) \end{aligned}$$

et $\int_{\mathbb{R}} f_1 = \widehat{f}(u)$ et $\int_{\mathbb{R}} g = \widehat{g}(u)$

Ainsi $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g} \quad \square$

II.B.2 Soit la fonction f paire définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = n$ pour $x \in [n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$, $f(n - \frac{2}{n^3}) = 0$, $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$,

f affine sur $[n - \frac{2}{n^3}, n - \frac{1}{n^3}]$ et sur $[n + \frac{1}{n^3}, n + \frac{2}{n^3}]$ pour $n \geq 2$ et nulle partout ailleurs (pour $x \geq 0$).

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable car paire et pour $x \geq 0$ on a $\int_0^x f \leq \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{k^2}$ avec $n = \text{Int}(x) + 1$

Si $(f * f)(0)$ était défini sa valeur serait $\int_{\mathbb{R}} f(t)f(-t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$

Or $\int_0^{n+2/n^3} f^2 \geq \sum_{k=2}^n \frac{2}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc $(f * f)(0)$ n'est pas défini. $\square$

II.C. - Sinus cardinal.

$$\begin{aligned} \text{II.C.1 } \widehat{k_n}(x) &= \int_{-n}^0 \left(1 + \frac{t}{n}\right) e^{-ixt} dt + \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) e^{-ixt} dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) (e^{ixt} + e^{-ixt}) dt \\ &= 2n \int_0^1 (1-u) \cos(nxu) du \end{aligned}$$

donc $\widehat{k_n}(0) = n$ et par parties $\widehat{k_n}(x) = \frac{2}{nx^2} (1 - \cos(nx)) = n \times \frac{2n}{(nx)^2} \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$ pour $x \neq 0$.

Ainsi $\widehat{k_n}(x) = n \times \varphi\left(\frac{nx}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \square$

II.C.2 φ est classiquement continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ donc est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $\pm\infty$ il vient $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x^2}$ ce qui prouve que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $\square$

II.C.3 On a K_n continue, positive et telle que $\int_{\mathbb{R}} K_n = 1$ (vérification immédiate par changement de variable).

Par ailleurs K_n est paire donc, pour prouver que (K_n) est une approximation de l'unité, il suffit de prouver que pour tout $\alpha > 0$ on a $\int_{\alpha}^{+\infty} K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or $2\pi \int_{\alpha}^{+\infty} K_n = n \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi\left(\frac{nt}{2}\right) dt = 2 \int_{n\alpha/2}^{+\infty} \varphi(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. $\square$

II.D. - Inversion de Fourier.

II.D.1 • Commençons par remarquer que les deux membres de l'égalité proposée ont bien un sens :

1/ l'intégrale $I_n(t)$ est bien définie car l'inégalité classique $|\sin u| \leq |u|$ fournit $|k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}| \leq |\widehat{f}(-x)|$ et par hypothèse $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \widehat{f}(-x)$ également.

2/ comme $2\pi K_n = \widehat{k_n}$ la fonction K_n appartient à $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (question II.A) donc $f * K_n$ est bien défini car $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\bullet \quad I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(k_n(x) e^{-itx} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{ixu} du \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) f(u) e^{-i(t-u)x} du \right) dx$$

Pour t fixé soit la fonction g_t définie par $g_t(u, x) = k_n(x) f(u) e^{-i(t-u)x}$

On a $|g_t(u, x)| = k_n(x) |f(u)|$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puisque k_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Fubini on a donc $I_n(t) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_t(u, x) du dx$.

• Par ailleurs la seconde intégrale imbriquée existe puisque $f * K_n$ est défini :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) f(u) e^{-i(t-u)x} dx \right) du &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(f(u) \int_{\mathbb{R}} k_n(x) e^{-i(t-u)x} dx \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{k_n}(t-u) du = (f * K_n)(t) \end{aligned}$$

Toujours par Fubini on a donc également $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_t(u, x) du dx = (f * K_n)(t)$

• Ainsi on a bien $I_n(t) = (f * K_n)(t)$ pour tout réel t . $\square$

II.D.2 • La suite (k_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1 donc la suite h_n définie par $h_n(x) = k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \widehat{f}(-x)e^{-itx}$ et cette suite est dominée sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto |\widehat{f}(-x)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en découle par le théorème de la convergence dominée que $I_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x) e^{-itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{itx} dx$

• Pour prouver que $(f * K_n)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$ on ne peut pas utiliser la question I.D.1) car on ne sait pas (a priori) que f est bornée (elle le sera a posteriori compte-tenu de la formule d'inversion !).

On va prouver directement dans le cas particulier de cette approximation de l'unité que le résultat est vrai.

On reprend les notations de I.D.1. pour prouver que $f * K_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Le début de la démonstration est exactement le même et on a comme alors :

$$\Delta_n(x) \leq \varepsilon + \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x, t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Or } \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt \leq |f(x)| \int_{\alpha}^{+\infty} K_n(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x-t)| K_n(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme (K_n) est une approximation de l'unité, $\int_{\alpha}^{+\infty} K_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par ailleurs $K_n(t) = \frac{1}{2\pi} \times n\varphi\left(\frac{nt}{2}\right) \leq \frac{2}{\pi n t^2}$ pour $t \neq 0$ et $t \mapsto \frac{|f(x-t)|}{t^2}$ est intégrable sur $[\alpha, +\infty[$ car dominée au voisinage de l'infini par $t \mapsto |f(x-t)|$ intégrable. Donc

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x-t)| K_n(t) dt \leq \frac{2}{n\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{|f(x-t)|}{t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et de même $\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x, t) dt$.

Il en découle que $\Delta_n(x) \leq 3\varepsilon$ pour $n \geq N_0$ c'est à dire que la suite $(f * K_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f .

- Un passage à la limite dans l'égalité $I_n(t) = f * K_n(t)$ fournit alors la formule d'inversion de Fourier. $\square$

III. Convolution et codimension finie.

III.A.1 L'application de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})^*$ définie par $\phi(g) = \varphi_g$ est clairement linéaire donc si la famille $(\varphi_{g_1}, \varphi_{g_2}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre il en va de même de la famille $(g_1, g_2, \dots, g_p)$.

Pour établir la réciproque il suffit de prouver que ϕ est injective.

Soit donc $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t)g(t) dt = 0$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Soit $A > 0$, $\varepsilon > 0$ et soit f continue à support compact définie par $f(t) = \overline{g}(-t)$ pour $t \in [-A, A]$, f nulle en dehors de $] -A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ et affine sur $[-A - \varepsilon, -A]$ et sur $[A, A + \varepsilon]$.

On a en particulier $\int_{\mathbb{R}} f(-t)g(t) dt = 0$ c'est à dire $\int_{-A}^A |g(t)|^2 dt + I_{\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1)$

avec $I_{\varepsilon} = \int_{-A-\varepsilon}^{-A} f(-t)g(t) dt + \int_A^{A+\varepsilon} f(-t)g(t) dt$.

Or g est bornée sur $\mathbb{R}$ mettons par M donc f également. De sorte que $|I_{\varepsilon}| \leq 2M^2\varepsilon$.

Par passage à la limite avec $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (1) on obtient donc que $\int_{-A}^A |g(t)|^2 dt = 0$.

Par le théorème de positivité amélioré de l'intégration il vient que $g(t) = 0$ pour tout $t \in [-A, A]$ et finalement, puisque A est quelconque, que $g = 0$ $\square$

III.A.2 • Supposons $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rang r et quitte à changer la numérotation supposons $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ libre.

On a alors clairement $K = \bigcap_{k=1}^r \text{Ker } f_k$.

Envisageons $f : E \rightarrow \mathbb{K}^r$ définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x))$. Alors f est linéaire, $\text{Ker } f = K$

Supposons $\dim \text{Im } f < r$. Alors $\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{K}^r$ donc il existe

$(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq (0, 0, \dots, 0)$ telle que $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_r f_r(x) = 0$ pour tout x de E c'est à dire telle que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_r f_r \equiv 0$ ce qui est contraire au fait que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ soit libre.

Ainsi $\text{Im } f = \mathbb{K}^r$. Or par le théorème du rang, la restriction de f à tout supplémentaire de $\text{Ker } f = K$ induit un isomorphisme sur $\text{Im } f$. Donc un tel supplémentaire est de dimension r en d'autres termes la codimension de K dans E est égale à r . $\square$

• Supposons désormais $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rang infini. Pour tout entier r on peut extraire une famille $(f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_r})$ de rang r . La démonstration précédente prouve que la codimension de $\bigcap_{k=1}^r \text{Ker } f_{n_k}$ est égale à r .

Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker } f_n = K \subset \bigcap_{k=1}^r \text{Ker } f_{n_k}$ donc la codimension de K est supérieure ou égale à r .

Et cela pour tout entier r . Cette codimension est donc infinie. $\square$

III.A.3 On a $\varphi_{T_x(g)}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt = (f * g)(x)$ donc $N_g = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \text{Ker } \varphi_{T_x(g)}$. Or la démonstration de la question précédente est valable même si la famille de formes linéaires n'est pas dénombrable.

Ainsi la codimension de N_g est égale au rang des formes linéaires $(\varphi_{T_x(g)})_{x \in \mathbb{R}}$ lequel est égal, d'après la question

III.A.1), au rang de la famille de fonctions $(T_x(g))_{x \in \mathbb{R}}$ c'est à dire à la dimension de V_g . $\square$

III.A.4 a) On a immédiatement $T_{\alpha}(g) = e^{-i\alpha\beta}g$ de sorte que la codimension de N_g est égale à 1. $\square$

b) • Soit $g(t) = \sum_{k=1}^n g_k$ avec $g_k(t) = e^{i\beta_k t}$ où les β_k sont n réels deux à deux distincts.

La famille $(g_k)_{k=1 \dots n}$ est libre car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres $i\beta_k$ deux à deux distinctes de l'endomorphisme $f \mapsto f'$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Notons $V_n = \text{vect}(g_k)_{k=1 \dots n}$ qui est donc de dimension n .

On a $T_\alpha(g)(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k$ avec $\lambda_k = e^{-i\beta_k \alpha}$ de sorte que $V_g \subset V_n$ donc $\dim V_g \leq n$.

En conclusion partielle pour une telle fonction g la codimension de N_g est finie (au plus n).

• Supposons en outre désormais les β_k deux à deux distincts modulo 2π .

Pour $p \in \mathbb{N}$, les composantes de $T_p(g)$ sur la base $(g_k)_{k=1 \dots n}$ de V_n sont $(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)$ avec $a_k = e^{-i\beta_k}$.

Donc le déterminant de la famille $(T_p(g))_{p=0, \dots, n-1}$ sur cette base est le déterminant de Vandermonde

$V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ qui est non nul puisque les a_p sont deux à deux distincts car $\beta_i \neq \beta_j$ modulo 2π .

Cette famille est donc libre et comme elle est incluse dans V_g on a $\dim V_g \geq n$.

Finalement $\dim V_g = n$ donc N_g est de codimension n dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. $\square$

III.B - Hypothèse A.

III.B.1) Soit $f \in N_g$ avec g vérifiant l'hypothèse A. On a par la question I.C.2) $f * g^{(k)} \equiv (f * g)^{(k)} \equiv 0$.

En particulier $\int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(k)}(-t) dt = f * g^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k . Donc $N_g \subset L_g$ avec $L_g = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\varphi_{g^{(k)}})$

Supposons en outre N_g de codimension finie. Il en va de même a fortiori de L_g vu l'inclusion ci-dessus.

Par la question III.A.2) la famille $(\varphi_{g^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ est de rang fini donc également la famille $(g^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par la question

III.A.1). Si on note p ce rang alors la famille $(g, g', \dots, g^{(p)})$ est liée ce qui se traduit bien par le fait que g satisfasse une équation différentielle linéaire à coefficients constants. $\square$

III.B.2) Soit g vérifiant l'hypothèse A et telle que N_g soit de codimension finie. Alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants comme on vient de le voir.

Donc g est du type $g(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_r(t)e^{\lambda_r t}$ où $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ est l'ensemble des racines distinctes de l'équation caractéristique et où les P_k sont des polynômes.

Comme g est bornée tous les λ_k sont imaginaires purs et les polynômes P_k constants (classique par l'absurde).

Donc g est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto e^{i\beta t}$ et réciproquement une telle fonction satisfait bien l'hypothèse A et est telle que N_g soit de codimension finie par la première partie de la démonstration de la question III.A.4.b).

L'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace $\text{vect}(t \mapsto e^{i\beta t})_{\beta \in \mathbb{R}}$ $\square$

III.C - Cas général.

III.C.1) Par la question III.A.3) on a $\dim V_g = \text{rg}(T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}} = n$.

Soit alors $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telle que $(T_{\alpha_1}(g), T_{\alpha_2}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ soit libre c'est à dire soit une base de V_g .

Pour tout réel α la fonction $T_\alpha(g) \in V_g$ donc se décompose sur cette base ce qui fournit le résultat demandé. $\square$

III.C.2) a) Comme F est de dimension p , il en va de même de F^* et il suffit donc de démontrer que la famille $(e_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est génératrice dans l'espace F^* pour obtenir le résultat demandé.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $G = \text{vect}_{\text{DEF}}(e_x)_{x \in \mathbb{R}}$ soit de dimension $r < p$.

Soit alors $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ telle que $(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r})$ soit une base de G .

Complétons la par $(\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p)$ en une base de F^* .

Soit alors $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ la base anté-duale de cette base $(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r}, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p)$.

On a en particulier $e_{a_1}(f_p) = e_{a_2}(f_p) = \dots = e_{a_r}(f_p) = 0$ donc $e_x(f_p) = 0$ pour tout réel x puisque $(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r})$ est une base de G . Donc $f_p(x) = 0$ pour tout réel x donc $f_p \equiv 0$ ce qui est contradictoire avec $\varphi_p(f_p) = 1$. $\square$

b) Notons que $\text{Det}(f_i(a_j)) = \text{Det}(e_{a_j}(f_i))$

Envisageons l'application ϕ de F dans $\mathbb{C}^p$ définie par $\Phi(f) = (e_{a_1}(f), e_{a_2}(f), \dots, e_{a_p}(f))$.

Par théorème de cours on a $\text{rg}(\phi) = \text{rg}(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_p}) = p$ donc ϕ est un isomorphisme de sorte que $(\phi(f_1), \phi(f_2), \dots, \phi(f_p))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si et seulement $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F . $\square$

III.C.3) La famille $(T_{\alpha_i}(g))_{i=1, \dots, n}$ est une base de V_g . Par la question précédente il existe une famille $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ telle que la famille $(e_{a_i})_{i=1, \dots, n}$ soit une base de V_g^* .

La question III.C.1) fournit alors le système aux inconnues $m_i(\alpha)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n T_{\alpha_i}(g)(a_1)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_1) \\ \sum_{i=1}^n T_{\alpha_i}(g)(a_2)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n T_{\alpha_i}(g)(a_n)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_n) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est la constante $\text{Det} \left(T_{\alpha_i}(g)(a_j) \right)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ non nulle par la question II.C.2.b)

Or les fonctions $\alpha \mapsto T_\alpha(g)(a_j)$ i.e. les fonctions $\alpha \mapsto g(a_j - \alpha)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et bornées puisque g l'est. La résolution de ce système par les formules de Cramer montre alors que les fonctions $\alpha \mapsto m_i(\alpha)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et bornées en tant que combinaisons linéaires des fonctions précédentes. $\square$

III.C.4) On a $T_\alpha(h_r * g)(x) = (h_r * g)(x - \alpha) = \int_{\mathbb{R}} h_r(t)g(x - \alpha - t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_r(t)T_\alpha(g)(x - t) dt = (h_r * T_\alpha(g))(x)$

$$\text{donc } T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)h_r * T_{\alpha_i}(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(h_r * g) \quad (1)$$

Ce qui prouve que $V_{h_r * g}$ est de dimension au plus n . $\square$

III.C.5) On a en (avec les notations précédentes) $T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j) = (h_r * g)(a_i - \alpha_j) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} g(a_j - \alpha_j) = T_{\alpha_i}(g)(a_j)$ d'après la question I.D.1).

Comme la fonction déterminant est continue il vient que $\text{Det} \left(T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j) \right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \text{Det} \left(T_{\alpha_i}(g)(a_j) \right) \neq 0$.

Donc pour r assez grand on a $\text{Det} \left(T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j) \right) \neq 0$

Il en découle (par l'absurde) que la famille de fonctions $(T_{\alpha_i}(h_r * g))_{i=1, \dots, n}$ est libre donc est une base de $V_{h_r * g}$ d'après (1).

Ainsi pour $r \geq r_0$ la dimension $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g . $\square$

III.C.6) Comme 1 et -1 sont racines d'ordre r du polynôme $(1 - t^2)^r$, ses dérivées s'annulent en 1 et -1 jusqu'à l'ordre $r - 1$. Il en découle que h_r est de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Ce qui prouve comme dans la question I.C.2) que $h_r * g$ est de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}(\mathbb{R})$

Comme $T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(h_r * g)$ on se retrouve exactement dans la situation de la question II.C.3)

avec $h_r * g$ à la place de la fonction g ce qui prouve que les fonctions m_i sont de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}$ et bornées.

Or r est quelconque donc les fonctions m_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elles sont en outre bornées. $\square$

III.C.7) Soit $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension finie.

D'après III.C.1) il vient $T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ c'est à dire

$$g(x - \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)g(x - \alpha_i) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

En particulier pour $x = 0$ on obtient $g(-\alpha) = \sum_{i=1}^n g(-\alpha_i)m_i(\alpha)$ ce qui prouve que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque les m_i le sont.

En dérivant (1) par rapport à x (ce qui est bien licite puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$) il vient

$$g^{(k)}(x - \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)g^{(k)}(x - \alpha_i) \text{ donc } g^{(k)}(-\alpha) = \sum_{i=1}^n g^{(k)}(-\alpha_i)m_i(\alpha) \text{ pour tout entier } k \text{ et tout réel } \alpha.$$

Ce qui prouve que toutes les dérivées de g sont bornées en tant que combinaisons linéaires des fonctions m_i qui sont bornées comme noté précédemment.

Ainsi si $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est telle que N_g soit de codimension finie alors g vérifie l'hypothèse A.

Il en découle d'après III.B) que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace vect $(t \mapsto e^{i\beta t})_{\beta \in \mathbb{R}}$

_____ FIN _____