

CONCOURS COMMUN INP 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE 1

Q1. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

Si il existe $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques.

Dans la suite, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1} \Delta_{1,n} + (-1)^{n+2} \Delta_{2,n} t + (-1)^{n+3} \Delta_{3,n} t^2 + \dots + (-1)^{n+n} \Delta_{n,n} t^{n-1}$$

avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t . Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\prod_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$ divise P , si P n'est pas le polynôme nul il est de degré $n-1$,

donc $P(X) = C \prod_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.

C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Ce qui donne pour $t = x_n$ $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_n - x_i)$.

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

La relation est vraie pour $n = 2$. On la suppose pour n .

Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts, on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= V(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q3. Soit $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i , donc

$$\begin{aligned} \det A &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n! V(1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.

Q4. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Soit n nombre complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, on a donc

$V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

est inversible. Le vecteur colonne $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est non nul donc MX l'est aussi.

Nous avons

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n \end{pmatrix}.$$

ainsi l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$ est non nulle.

EXERCICE 2

Q5. Par récurrence on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour tout $k \geq 0$.

La convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

qui est de dimension finie, ce qui prouve la convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$.

Q6. Soit $f_k : A \mapsto \frac{1}{k!} A^k$ et $r > 0$, on a $\|f_k(A)\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{r^k}{k!}$, donc la série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement et uniformément sur la boule $B(0, r)$.

Continuité de f_k :

L'application $\varphi : (A_1, A_2, \dots, A_k) \mapsto A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ est continue, car elle est k -linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $\psi : A \mapsto (A, A, \dots, A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ donc elle est continue.

Ainsi $f_k = \frac{1}{k!} \varphi \circ \psi$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne, $A \mapsto e^A$ est continue sur $B(0, r)$ pour tout $r > 0$ donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q7. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle telle que $\|H\| \leq r$.

Par continuité de la norme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|H\|} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^{k-1}}{k!} \\ &\leq \|H\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{r^{k-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$, qui s'écrit $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = o(\|H\|)$.

Examinons la différence $e^{H+0} - e^0$, qui vaut

$$e^H - I_n = H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = H + o(\|H\|)$$

donc l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 et sa différentielle est l'application identité.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. On a

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -b \\ -b & \lambda - a & -b \\ -b & -b & \lambda - a \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} (\lambda - a - 2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & \lambda - a & -b \\ 1 & -b & \lambda - a \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda - a - 2b) \begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & \lambda - a + b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a + b \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda - a - 2b) (\lambda - a + b)^2
 \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{a + 2b, a - b\}$, par suite $A \in \mathcal{S}_3^+$, si et seulement si, $(a + 2b \geq 0$ et $a \geq b)$.

Q9. Par récurrence on a pour tout entier k non nul $J^k = 3^{k-1}J$. La relation est non valable pour $k = 0$.

On a $A = (a - b)I_3 + bJ$ et, I_3 et J commutent donc

$$e^A = e^{(a-b)I_3} e^{bJ}$$

de plus $e^{(a-b)I_3} = e^{a-b}I_3$ et

$$\begin{aligned}
 e^{bJ} &= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} J^k \\
 &= I_3 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(3b)^k}{k!} J \\
 &= I_3 + \frac{e^{3b} - 1}{3} J
 \end{aligned}$$

ainsi

$$e^A = e^{a-b}I_3 + \frac{e^{a+2b} - e^{a-b}}{3}J$$

Nous avons

$$e^A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{e^{a+2b} + 2e^{a-b}}{3} \text{ et } \beta = \frac{e^{a+2b} - e^{a-b}}{3}$$

elle a la même forme que A par le même calcul on a $Sp(e^A) = \{\alpha + 2\beta, \alpha - \beta\} = \{e^{a+2b}, e^{a-b}\}$, d'où

$e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue .

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, par récurrence on a $A^k = PD^kP^{-1}$ ce qui donne

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k = P \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1}$$

l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} \quad \text{et} \quad e^A = Pe^DP^{-1}$$

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$, ainsi $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$, donc $E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$ elle a la même forme que A par

le même calcul on a $Sp(E(A)) = \{e^a + 2e^b, e^a - e^b\}$.

On a $e^a + 2e^b \geq 0$ et $a \geq b$ car $A \in \mathcal{S}_3^+$ ce qui donne $e^a - e^b \geq 0$ ainsi $Sp(E(A)) \subset \mathbb{R}^+$ et $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.

Q12.

- Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$${}^tYDY = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

- Soit $A \in \mathcal{S}_n$ donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = {}^tP.D.P$.

Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors $D \in \mathcal{S}_n^+$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX {}^tP.D.PX \\ &= {}^t(PX).D.(PX) \geq 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement : si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXAX \geq 0$. Soit λ une valeur propre de A et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ de, alors

$${}^tXAX = \lambda {}^tX X = \lambda \sum_{k=1}^n x_k^2$$

donc $\lambda \geq 0$ par suite $A \in \mathcal{S}_n^+$.

Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXAX \geq 0$.

Q13.

- Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs. Pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$${}^tX(\alpha A + \beta B)X = \alpha {}^tXAX + \beta {}^tXBX \geq 0$$

donc $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$.

- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ alors AB n'est pas forcément symétrique donc en général elle ne sont pas dans $\mathcal{S}_n^+$,

par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $A, B \in \mathcal{S}_2^+$:

$$\begin{array}{l|l} {}^tXAX = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & {}^tXBX = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = 2x^2 + 2xy + y^2 & = x^2 + 2xy + y^2 \\ = x^2 + (x+y)^2 \geq 0 & = x^2 + (x+y)^2 \geq 0 \end{array}$$

mais

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2$$

Q14. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ et telles que $A = {}^tP.D.P$.

Posons $R = {}^tP.\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).P$, on a $R \in \mathcal{S}_n^+$ et $A = R^2$.

Q15. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$, $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$. $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$.

Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $A * B = (c_{i,j})$.

- Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k}u_{k,j}$, or U est symétrique donc $u_{i,j} = u_{j,i}$ donc

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j}, \text{ de même } b_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n v_{i,\ell}v_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j}, \text{ ainsi}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j} \right).$$

- Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^tX(A * B)X &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{n,j}x_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j}x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j} \right)
\end{aligned}$$

posons $u'_{k,i} = u_{k,i}x_i$ pour tout $(k,i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $U' = (u'_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$.

On a ${}^tU'U' = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (\sum_{k=1}^n u'_{k,i}u'_{k,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ donc

$$\begin{aligned}
{}^tX(A * B)X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n u'_{k,i}u'_{k,j} \right) \left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{i,j}b_{i,j} \\
&= \text{Tr}((a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \cdot {}^t(b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}) \\
&= \text{Tr}({}^tU'U'.V^2) \quad (\text{car } V \text{ est symétrique}) \\
&= \text{Tr}({}^t(U'V).U'V) \\
&= \|U'V\|^2 \quad (\text{norme euclidienne de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

Ainsi $A * B \in \mathcal{S}_n^+$.

Q16. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a alors $A^{*0} = (1)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $A^{*p} = (a_{i,j}^p)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Pour N entier naturel non nul

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p} \\
&= \left(\sum_{p=0}^N \frac{a_{i,j}^p}{p!} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}
\end{aligned}$$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = (e^{a_{i,j}})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = E(A)$.

Q17. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\Phi : M \mapsto {}^tXMX$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ donc elle est continue.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{S}_n^+$, montrons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k \in \mathcal{S}_n^+$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\Phi(A_k) = {}^tXA_kX \geq 0$, Φ est continue donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(A_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k\right) = {}^tXAX \geq 0,$$

ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, d'après Q15 et par récurrence $A^{*k} \in \mathcal{S}_n^+$, et d'après Q13, $T_N \in \mathcal{S}_n^+$ car elle est combinaison linéaire, avec des coefficients positifs, de matrices symétriques positives.

Par suite $E(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N \in \mathcal{S}_n^+$.

FIN