

E3A MP épreuve B 2014

Exercice 1

1) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$.

$\ker(u)$ est stable par v .

Soit $x \in \text{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \text{Im}(u)$.

$\text{Im}(u)$ est stable par v .

2) Soit $x \in \text{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.

$\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

3) On en déduit que $\text{rg}(u) \leq \dim(\ker(u))$. Par le théorème du rang, on obtient $\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.

2)

a) Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\text{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.

Alors $D = \ker(u) = \text{Im}(u)$ est une droite

b)

(i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $D = \text{Im}(u)$ est stable par v .

(ii) D est donc propre pour v . Or $\text{sp}(v) = \{0\}$.

Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \text{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.

c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \text{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.

5)

a) Posons, pour $1 \leq i \leq m-1$, $v = u_1 \circ \dots \circ u_i$. v et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1} .

b) On effectue une récurrence sur i :

$$(H_i) \dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}.$$

(H_1) est obtenu par (3).

Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit \tilde{u}_{i_0+1} le morphisme induit par u_{i_0+1} sur F_{i_0} . $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\text{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \frac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\text{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car

les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}) . Ceci achève la récurrence.

c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $u_1 \circ \dots \circ u_m = 0$.

6)

a) Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}({}^tA)) = n$. De plus si $x \in \ker(A) \cap \text{Im}({}^tA)$, $Ax = 0$ et $x = {}^tAy$ donc $A{}^tAy = 0$ et $\|Ay\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $E = \ker(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$.

b) $\text{Im}(A + {}^tA) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$. De plus les deux sous-espaces sont de même dimension $2\text{rg}(A)$. Donc $\text{Im}(A + {}^tA) = \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$.

Exercice 2

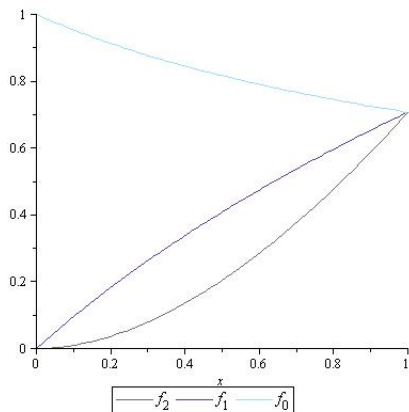
1) Cours.

2)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(2n + (2n-1)x)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ donc sur $[0, 1]$, f_0 est strictement décroissante et

f_n est strictement croissante pour $n \geq 1$.

b)



c) (f_n) converge simplement vers f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. f n'est pas continue sur $[0, 1]$, donc la convergence n'est pas uniforme.

4) $\forall x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ est décroissante donc par croissance de l'intégrale (u_n) est décroissante. La suite (f_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, dominée par f_0 . Donc (u_n) converge vers 0.

5) Le résultat annoncé est obtenu par intégration par parties en intégrant x^n et en dérivant $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

6) Par une nouvelle application du théorème de convergence dominée, on montre que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}^3} dx \rightarrow 0$.

On en déduit donc que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

7) On répète l'intégration par parties en intégrant de nouveau le polynôme et en dérivant $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. On

obtient alors $(n+2)(n+1)u_n = \frac{n+2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}^3} + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} dx$.

Ainsi $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \alpha_3 = \frac{3}{4}$

8) Après développement asymptotique, on obtient $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Ainsi $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

9) Par intégration par parties généralisée, en intégrant k fois x^n et en dérivant g on obtient

$$\int_0^1 x^n g(x) dx = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1) \dots (n+j+1)} + o(\frac{1}{n^k})$$

Chaque fraction rationnelle $\frac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1) \dots (n+j+1)}$ possède un développement asymptotique. En regroupant les termes selon les puissances de n , on obtient bien

$$v_n = \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{n^j} + o(\frac{1}{n^k})$$

où $\beta_1 = g(1), \beta_2 = g'(1) - g(1)$.

10) Posons $w_n = \int_0^1 x^n g(x) dx$. La question (9) nous permet d'affirmer que si la suite a une limite, c'est

$h(1)$. Par convergence dominée, (w_n) converge vers 0. $(n+1)w_n - h(1) = (n+1) \int_0^1 x^n (h(x) - h(1)) dx$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |h(x) - h(1)| < \varepsilon$. Alors $|(n+1)w_n - h(1)| \leq (n+1) \int_0^{1-\alpha} x^n (h(x) - h(1)) dx + (n+1) \int_{1-\alpha}^1 x^n \varepsilon dx \leq 2\|h\|_\infty (1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon$. Donc $nw_n \rightarrow h(1)$.

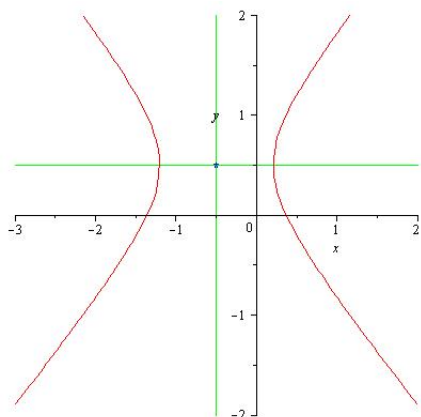
Exercice 3

1) L'équation réduite de \mathcal{C} est $(x + \frac{a}{2})^2 - (y - \frac{b}{2})^2 = 1 + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$. \mathcal{C} est une hyperbole (ou la réunion de

deux droites quand $a^2 - b^2 = 2$).

2) Les axes sont les droites (Ω, i) et (Ω, j) où Ω est le point d'affixe $\frac{-a + ib}{2}$.

3)



4) Si M d'affixe z est dans \mathcal{C} , il en est de même de M' d'affixe $-z - a + ib$. Donc $\frac{-a + ib}{2}$ est centre de symétrie de \mathcal{C} .

5) $2x = z + \bar{z}$ et $2iy = z - \bar{z}$. Donc en reportant dans l'équation, on obtient $p \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + \bar{p}z + p\bar{z} = 1$. Ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = p = \bar{\beta}_1$

6) On déduit que p est un point de \mathcal{C} si et seulement si $4a^2 = 1$.

7) p et q sont racines du polynôme $X^2 - (p + q)X + pq$, c'est à dire $P = X^2 + X = 2$.

8) w étant une racine 7^{ième} de l'unité distincte de 1, $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$. Donc en développant, $(w + w^2 + w^4)(w^{-1} + w^{-2} + w^{-4}) = 2$.

9) $w + w^2 + w^4 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-4} = w^{-4}(1 + w + w^2 + w^3 + w^5 + w^6) = -w^{-4}w^4 = -1$. Par conséquent, $\{w + w^2 + w^4, w^{-1} + w^{-2} + w^{-4}\} = \{p, q\}$.

10) On admet que $\Im(w + w^2 + w^4) > 0$. Or $\Im(p) > 0$ et $\Im(p + q) = 0$, donc $w + w^2 + w^4 = p$ et $w^{-1} + w^{-2} + w^{-4} = q$.

11) $(X - w)(X - w^2)(X - w^4) = X^3 - (w + w^2 + w^4)X^2 + (w^{-1} + w^{-2} + w^{-4})X - 1 = \frac{X^3 - pX^2 + qX - 1}{1}$.

12) $1, w, w^2, w^4$ sont racines de $(1 - X)(X^3 - pX^2 + qX - 1)$, c'est à dire de $X^4 + qX^3 - X^2 + pX^2 + 1$.

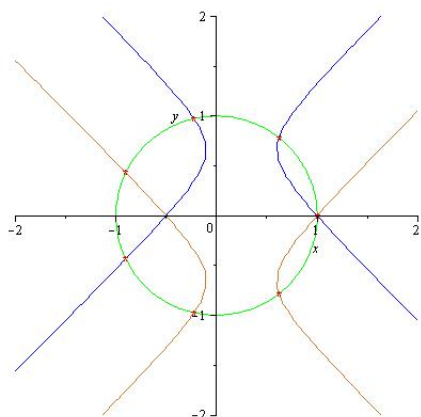
13) Soit $z \in \mathbb{C}$. $Z \in U \cap \mathcal{C}$ ssi $|z| = 1$ et z satisfait l'équation de la question (3). Après simplification, $Z \in U \cap \mathcal{C}$ ssi $|z| = 1$ et z est racine de $X^4 + qX^3 - X^2 + pX^2 + 1$.

Or les racines de $X^4 + qX^3 - X^2 + pX^2 + 1$ sont de module 1. Donc Les points d'intersection de U et \mathcal{C} sont $1, w, w^2, w^4$.

14)

a) L'image de p est \bar{p} .

b)



c) L'intersection de U avec $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})$ est $\{w, w^2, w^4, w^{-1}, w^{-2}, w^{-4}, 1\}$.