

# Concours Communs polytechniques - Session 2015

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques II (partie algébrique) Filière MP

Projection orthogonale, surjectivité de l'application exponentielle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vers  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Corrigé par M.TARQI<sup>1</sup>

### Exercice II. Projection orthogonale

II.1. On vérifie facilement que  $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

II.2. Notons  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il est clair que la famille  $(E_{11}, E_{12}, E_{22})$  est une famille génératrice de  $\mathcal{T}$ ; en fait c'est une base orthonormée de  $\mathcal{T}$  pour le produit scalaire canonique.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^\perp$ , alors  $(A|E_{11}) = (A|E_{12}) = (A|E_{22}) = 0$ , donc nécessairement  $a = b = d = 0$ , donc  $A = cE_{21} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi  $\mathcal{T}^\perp$  est une droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire  $E_{21}$ .

II.3. Notons  $p(A)$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $\mathcal{T}$  et  $d(A, \mathcal{T})$  la distance entre  $A$  et le sous-espace vectoriel  $\mathcal{T}$ . On a  $A = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{21} + 4E_{22}$ , donc  $p(A) = E_{11} + 2E_{12} + 4E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

D'autre part, d'après le théorème du cours,  $d(A, \mathcal{T}) = \sqrt{(A - p(A)|A - p(A))} = 3$ .

### Problème III. Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

#### PARTIE PRÉLIMINAIRE

III.1. On peut vérifier facilement que l'application  $A \mapsto \|A\|$  est une norme sur l'espace des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  deux matrices à coefficients complexes et  $C = AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ . D'où

$$n|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| \leq n \sup_{1 \leq l \leq n} |a_{il}| \sum_{k=1}^n |b_{kj}| \leq n^2 \sup_{1 \leq l \leq n} |a_{il}| \sup_{1 \leq m \leq n} |b_{mj}|.$$

D'où, par passage à la borne supérieure sur les couples  $(i, j)$ ,  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ . Donc il s'agit bien d'une norme d'algèbre.

III.2.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est un espace vectoriel de dimension finie, donc toute série d'éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  absolument convergente est convergente.

---

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

III.3. Puisque on a une norme d'algèbre, alors  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\left\| \frac{M^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|M\|^k}{k!}$  et comme la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|M\|^k}{k!}$  converge, alors la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{M^k}{k!}$  est absolument convergente, donc converge.

### PREMIÈRE PARTIE

III.4 Le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est scindé, donc, d'après le théorème du cours, toute matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est trigonalisable. Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres ( complexes ou réels ) de  $M$ , alors il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$M = PTP^{-1}$$

où  $T$  est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $M$ . Donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a  $\frac{M^k}{k!} = P \frac{T^k}{k!} P^{-1}$  et donc  $\sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} = P \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1}$  et ceci pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'autre part l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  étant continue ( application linéaire en dimension finie ), donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} P \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1} = P \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1}.$$

Autreemnt dit  $\exp(M) = P \exp(T) P^{-1}$ , d'où  $\det \exp(M) = \det \exp(T)$ . Mais d'après le résultat donné dans cette partie  $\det \exp(T) = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{tr}(M)}$ . D'où  $\det \exp(M) = e^{\text{tr}(M)}$  dans cette partie toute matrice

III.5. On vérifie facilement que  $\det A = -12$ . Supposons qu'il existe une matrice  $B$  à coefficients réels telle que  $B^2 = A$ , donc  $\det A = (\det B)^2 \geq 0$  ce qui est absurde puisque  $\det A = -12 < 0$ . Donc il n'existe aucune matrice  $B$  à coefficients réels telle que  $B^2 = A$ .

Toujours, par l'absurde, supposons qu'il existe une matrice  $M$  à coefficients réels telle que  $\exp(M) = A$ , donc  $\det A = \det \exp(M) = e^{\text{tr}(M)} \geq 0$  ( $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc  $\text{tr}(M) \in \mathbb{R}$ ), ce qui est absurde.

### DEUXIÈME PARTIE

III.6.

III.6.a. Considérons les applications  $f_1 : x \mapsto 3^x e^{i\pi x} \in F$  ( $k = 0, \rho = 3, \theta = \pi$ ) et  $f_2 : x \mapsto x^2 2^x e^{i2\pi x} \in F$  ( $k = 2, \rho = 2, \theta = 2\pi$ ). On a bien  $f = \alpha f_1 + \beta f_2 \in F$  et vérifie  $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$ .

III.6.b. On a  $x \mapsto (x + x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} (x^j \rho^x e^{i\theta x})$ , puisque tout élément de  $F$  est une combinaison des applications de type  $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$ , alors si  $f \in F$ ,  $x \mapsto f(x + x_0) \in F$ .

III.7.

III.7.a. Posons  $u_n = n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ , donc  $u_n$  est le terme général d'une série convergente, donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

III.7.b. L'égalité (\*) :  $\alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} + \beta \alpha n^{k_2} \rho_2^n e^{i\theta_2 n} = 0$  s'écrit encore  $\beta = -\alpha n^{k_1 - k_2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n e^{i(\theta_1 - \theta_2)n}$ .

- Si  $\rho_1 < \rho_2$ , alors comme dans la question précédente,  $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} -\alpha n^{k_1 - k_2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n e^{i(\theta_1 - \theta_2)n} = 0$ , puis  $\alpha = 0$ .
- Si  $\rho_1 = \rho_2$ , l'égalité (\*) s'écrit  $\alpha n^{k_1} e^{i\theta_1 n} + \beta \alpha n^{k_2} e^{i\theta_2 n} = 0$  ou encore  $\beta = -\alpha n^{k_1 - k_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)n}$ , donc  $|\beta| = |\alpha| n^{k_1 - k_2}$ .
  - Si  $k_1 < k_2$ , alors on obtient par passage à la limite  $\beta = 0$  puis  $\alpha = 0$
  - Si  $k_1 > k_2$ , alors on obtient par passage à la limite  $\alpha = 0$  puis  $\beta = 0$
  - Si  $k_1 = k_2$ , on obtient alors l'égalité  $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha e^{i\theta_1 n} + \beta e^{i\theta_2 n} = 0$  puis le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i\theta_1} + \beta e^{i\theta_2} = 0 \end{cases}$$

et comme  $\theta_1 \neq \theta_2$ , alors  $(0, 0)$  est l'unique solution, donc  $\alpha = \beta = 0$ .

III.7.c Si  $f, g \in F$  alors  $f - g \in F$  et donc si  $f(n) = g(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $f = g$ .

III.8. En divisant  $X^n$  par le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$ , on obtient une relation de type :

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3.$$

Les nombres  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions de  $n$  et plus précisément ils ont des expressions de la forme donnée dans la page 5, c'est-à-dire  $a, b$  et  $c$  s'expriment à l'aide des fonctions de  $F$ , en conséquence le coefficient de la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A^n$  est de la forme  $w_{i,j}(n)$  où  $w_{i,j} \in F$ .

III.9

III.9.a. Il est clair que  $\gamma(0) = I_3$  et  $\gamma(1) = A$ .

III.9.b. On a  $\gamma(n+m) = A^{n+m} = A^n A^m = \gamma(n)\gamma(m)$ .

III.9.c.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g(n)$  c'est le coefficient de la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de la matrice  $\gamma(n)\gamma(m)$ , donc c'est  $w_{ij}(n+m)$ , d'où  $f = g$  sur  $\mathbb{N}$  et comme  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $F$ , alors  $f = g$  sur  $\mathbb{R}$  ( la question III.7.c. ) et par conséquent  $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$ .

III.9.d. Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, les applications  $y \mapsto w_{ij}(x+y)$  et  $y \mapsto \sum_{k=1}^2 w_{ik}(x)w_{kj}(y)$  sont des éléments de  $F$  et coïncident sur  $\mathbb{N}$ , donc elles coïncident sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $\forall y \in \mathbb{R}, \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ .

III.10. On a  $\gamma(0) = \gamma(1)\gamma(-1)$ , c'est-à-dire  $I_3 = A\gamma(-1)$ , donc  $A^{-1} = \gamma(-1)$ .

On peut vérifier par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$  que  $\forall x \in \mathbb{R}, \gamma(px) = (\gamma(x))^p$ . En particulier  $\gamma(1) = \gamma\left(p \times \frac{1}{p}\right) = \gamma\left(\frac{1}{p}\right)^p$ , donc  $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = A$ .

III.11. Les applications de type  $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$  où  $k \in \{0, 1, 2\}$   $\rho > 0$  et  $\theta \in ]0, 2\pi]$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et comme chaque  $w_{ij}$  est une combinaison linéaire de ces applications alors  $w_{ij}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc  $\gamma$  aussi.

D'autre part,  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \frac{\gamma(h) - I_3}{h} \gamma(t) = \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} \gamma(t).$$

On obtient donc, quand  $h$  tend vers 0, la relation  $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$ , et comme  $\gamma(0) = I_3$ , alors  $\gamma$  est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} u'(t) = \gamma'(0)u(t) \\ u(0) = I_3 \end{cases}$$

La solution d'une telle équation est donnée par  $u(t) = \exp(t\gamma'(0))u(0) = \exp(t\gamma'(0))$ , donc par unicité de la solution, on a ;

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \exp(t\gamma'(0)).$$

En particulier  $A = \gamma(1) = \exp(\gamma'(0))$ .

### TROISIÈME PARTIE : EXEMPLE

III.12 On obtient :  $\chi_A(X) = (X - 2)^2(X + 1)$ . Donc la matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre  $E_2$  associé à la valeur propre  $\lambda = 2$  est 2, cherchons  $E_2$  :

A la valeur propre  $\lambda = 2$  correspond le système :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

Donc  $E_2 = \text{Vect}(1, 1, -1)$ . Donc  $\dim E_2 = 1 < 2$ , donc  $A$  n'est diagonalisable.

III.13 Soient  $a, b$  et  $c$  des réels tels que  $A^n = aA^2 + bA + c$ . Comme dans l'énoncé on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^n \\ a - b + c = (-1)^n \\ 4a + b = n2^{n-1} \end{cases}$$

dont l'unique solution est donnée par

$$(a, b, c) = \left( \frac{(-1)^n}{9} + \frac{n2^n}{6} - \frac{2^n}{9}, 4\frac{(-1)^{n+1}}{9} - \frac{n2^n}{6} + 4\frac{2^n}{9}, \frac{4(-1)^n}{9} - \frac{n2^n}{3} + 5\frac{2^n}{9} \right).$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & (-1)^n & (-1)^n + n2^{n-1} - 2^n \\ -n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}$$

On pose alors, pour tout réel  $t$ , la matrice  $\gamma(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t2^{t-1} + 2^t & 0 & t2^{t-1} \\ t2^{t-1} & e^{i\pi t} & e^{i\pi t} + t2^{t-1} - 2^t \\ -t2^{t-1} & 0 & -t2^{t-1} + 2^t \end{pmatrix}$$

D'où :

III.13.a.  $A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & -1 & \frac{-7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$

III.13.b. La matrice  $B = \gamma(\frac{1}{2})$  vérifie  $B^2 = A$ . On trouve

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & i & i - \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

III.13.c. La matrice  $M = \gamma'(0)$  vérifie  $\exp(M) = A$ . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2^t \ln 2 + 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 & 0 & 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 \\ 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 & i\pi e^{i\pi t} & i\pi e^{i\pi t} - 2^t \ln 2 + 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 \\ -2^{t-1} - t2^{t-1} \ln 2 & 0 & 2^t \ln 2 + 2^{t-1} - t2^{t-1} \ln 2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & i\pi - \ln 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \ln 2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

•••••