Annexe III

Objectifs de formation et programme de mathématiques de la classe préparatoire scientifique d'ATS génie civil

Table des matières

Mission de la filière et acquis des étudiants

Les classes préparatoires ATS sont destinées aux étudiants titulaires d'un BTS ou ayant validé 120 crédits européens dans le cadre des deux premières années de BUT, désireux de poursuivre en écoles d'ingénieurs. Ces derniers ont besoin d'une formation scientifique plus solide pour suivre avec profit des études d'ingénieurs. C'est à eux que s'adresse la filière ATS.
Cette formation mathématique adaptée s'insère dans une organisation de l'enseignement de la discipline valide pour toutes les sections. Les objectifs de formation sont définis comme suit :

- fournir les outils nécessaires pour permettre aux élèves de suivre avec profit d'autres enseignements utilisant des savoir-faire mathématiques ;
- contribuer au développement de la formation scientifique grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche mathématique : mathématisation d'un problème (modélisation), mise en œuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus ;
- développer des capacités personnelles : acquisition des méthodes de travail, maîtrise des moyens d'expression et des méthodes de représentation, emploi des moyens de documentation.

Le programme des sections de techniciens supérieurs est organisé en modules, chaque module correspondant à un champ mathématique précis. Le programme de chaque BTS indique les modules à enseigner. Les étudiants fréquentant la filière ATS provenant de spécialités différentes ont donc suivi en mathématiques des formations différentes. Compte tenu de la répartition des étudiants de la filière, on suppose a priori, pour l'organisation de l'enseignement, qu'ils ont suivi les enseignements correspondant aux modules suivants :

- suites numériques ;
- fonctions d'une variable réelle ;
- calcul intégral ;
- équations différentielles.

On remarque que la formation mathématique des titulaires de BTS est essentiellement tournée vers l'analyse. Dans les classes ATS, une grande attention devra donc être portée à l'enseignement de l'algèbre linéaire. En particulier, on prendra soin de ne pas regrouper l'enseignement de l'algèbre en un seul bloc mais au contraire de le répartir sur l'ensemble de l'année afin que ces notions nouvelles pour les étudiants soient assimilées dans la durée.

Objectifs de formation

Le programme de mathématiques d'ATS s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes de BTS et BUT, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
En mathématiques comme dans les autres disciplines, il est demandé aux étudiants de prendre du recul par rapport à leurs savoirs opérationnels afin de progresser vers une approche plus conceptuelle. C'est cette greffe d'un enseignement plus théorique sur une pratique professionnelle maîtrisée à un certain niveau qui fait l'originalité et la richesse de la filière ATS.

Compétences développées

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.
Dans ce cadre, la formation mathématique vise le développement des compétences générales suivantes :

- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;

— **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Ces compétences sont dans le prolongement des compétences développées dans les sections de technicien supérieur.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire ou de la géométrie. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :

— prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
— connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
— faire le lien avec le programme d'informatique ;
— prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les grands équilibres du programme n'ont pas été modifiés. C'est ainsi que les deux grands axes « Analyse et géométrie » et « Algèbre et géométrie » demeurent présents. Si le choix a été fait de ne pas introduire les probabilités dans les contenus du programme, on pourra cependant illustrer certaines notions du programme à l'aide d'exemples faisant intervenir des probabilités.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants, en liaison le cas échéant avec le programme d'informatique.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle. En introduction à l'algèbre linéaire, la section sur les systèmes linéaires permet de rappeler les propriétés élémentaires relatives aux droites du plan, aux droites et plans de l'espace.

Ces aménagements devraient permettre de constituer un programme cohérent autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Chaque section du programme comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions.
Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes. En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

PROGRAMME

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres sections, en vue d'être acquises en cours d'année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant les quantificateurs. Formuler une négation. Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant des connecteurs. Formuler une négation.
b) Ensembles	
On se limite à une approche naïve. Aucun développement n'est fait sur la théorie des ensembles.	
Appartenance, inclusion.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $\complement_E A$, $\overline{A}$, $E \setminus A$.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.	Un élément de E^p est appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.
c) Méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition.	Écrire la contraposée d'une assertion.
Raisonnement par l'absurde.	Mener un raisonnement par l'absurde.
Raisonnement par récurrence.	Limité aux récurrences simples.
d) Applications	
Application (ou fonction) d'un ensemble E dans un ensemble F. Graphe d'une application.	Manipuler le langage élémentaire des applications. Faire le lien avec la notion de graphe. Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restrictions.	Notation $f_{\|I}$.
Image directe.	
Composition.	Reconnaître une fonction composée.
Injection, surjection, bijection, réciproque d'une bijection.	Résoudre des équations.
Application identité.	

Pratique calculatoire

Cette section a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont différées à des sections ultérieures. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise cette section de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.
Les objectifs de formation sont les suivants :

- *une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *la manipulation des fonctions classiques ;*
- *le calcul de limites, de dérivées et de primitives ;*
- *l'utilisation des notations techniques fondamentales du calcul algébrique.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Dresser un tableau de signe. Résoudre des inéquations. Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$. L'objectif est une maîtrise de la manipulation des inégalités élémentaires.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	
b) Équations, inéquations polynomiales et trigonométriques	
Équation du second degré.	Déterminer le signe d'un trinôme.
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles.	Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques.
Formules exigibles : $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\tan(a+b)$.	Exprimer $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$. Transformer $a\cos(t)+b\sin(t)$ en $A\cos(t-\varphi)$.
c) Calcul de limites en un point ou à l'infini	
Aucune étude théorique de la limite n'est abordée à ce stade. On s'appuie sur les connaissances des limites acquises au lycée.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse. Exemples de formes indéterminées.	Lever, sur des exemples simples, certaines formes indéterminées à l'aide de limites de taux d'accroissement, à savoir : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x};$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$ On s'appuie sur l'étude de la dérivée faite au lycée.
Croissances comparées.	Calculer une limite par encadrement ou par comparaison.
Limite d'une fonction composée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Calcul de dérivées et de primitives	
Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opérations : somme, produit, quotient.	Dériver une fonction composée.
Exemples de calculs de dérivées partielles. Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$.	
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître des expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u'}{u^n}$, $(v' \circ u).u'$, où u et v sont des fonctions dérivables, afin d'en calculer les primitives.
e) Sommes et produits	
Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ sur des exemples de difficulté raisonnable. On utilise aussi la notation $a_0 + \cdots + a_n$.
Factorielle, coefficients binomiaux.	Notations $n!$, $\binom{n}{k}$ lue « k parmi n ».
Triangle de Pascal, formule de binôme de Newton.	Développer $(a \pm b)^n$.
Factorisation de $a^n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Exemple de calcul de sommes : $\sum_{k=0}^{n} k \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k$.	

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis des années précédentes. Le programme combine plusieurs aspects :

- *équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *interprétation géométrique des nombres complexes ;*
- *exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier cette section aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	
La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.	
Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes.	Notations $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$.
Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.	Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\overline{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct.
Module d'un nombre complexe. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement $\lvert z-a\rvert$ avec $(a, z) \in \mathbb{C}^2$.
b) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1	
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$.	
Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$. Formule de Moivre.	Factoriser $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où $z = x + \mathrm{i}y$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.	
c) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Coordonnées polaires.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe.
Arguments d'un produit, d'un quotient.	
d) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées d'un nombre complexe.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou trigonométrique.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
e) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ième d'un nombre complexe.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$.

Géométrie élémentaire du plan

Les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles. La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Cette section doit être traitée en liaison avec les autres disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormal (ou orthonormé). Coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ sinon.	Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale.
Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale (démonstration non exigible). Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. Déterminer une mesure d'un angle non orienté.
c) Déterminant dans une base orthonormée directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$$ et $\det(\vec{u},\vec{v})=0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie.	Interpréter un déterminant en termes d'aire orientée d'un parallélogramme. Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Calculer le déterminant dans une base orthonormale directe. Démonstrations non exigibles. Notation : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
d) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal.	
Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement. Déterminer l'intersection de deux droites. Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Calculer la distance d'un point à une droite.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Cercles	
Définition, équation cartésienne.	Reconnaître une équation cartésienne de cercle. Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation. Déterminer une équation d'un cercle connaissant les extrémités d'un diamètre.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans cette section, on adapte à l'espace les notions étudiées dans la section de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur la section de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormal (ou orthonormé) de l'espace; coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale directe (démonstration hors programme).
c) Produit vectoriel dans l'espace orienté	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de norme $\|\|\vec{u}\|\| \, \|\|\vec{v}\|\| \, \|\sin(\vec{u},\vec{v})\|$ directement orthogonal à $(\vec{u},\vec{v})$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Bilinéarité, antisymétrie.	La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise. Exprimer le produit vectoriel dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme.
d) Déterminant dans l'espace orienté muni d'une base orthonormée directe	
Définition du déterminant de trois vecteurs : $$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$	Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires. Interpréter $\left\|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right\|$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Exprimer le déterminant dans une base orthonormée directe. Notation : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Trilinéarité, antisymétrie.	Démonstrations hors programme.

e) Plans et droites

Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre.
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite. Passer d'une représentation à l'autre. Étudier les intersections.
Distance d'un point à un plan.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan.

f) Sphères

Définition, équation cartésienne en repère orthonormé.	Reconnaître une équation cartésienne de sphère. Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation. Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Cette section est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Domaine de définition d'une fonction.	
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Exemples de fonctions paires ou impaires définies sur une demi-période en vue de l'étude des séries de Fourier.
Somme, produit, composée.	
Monotonie.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
Extremum, extremum local.	

b) Dérivation

Équation de la tangente en un point.	Interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.

Contenus	Capacités & Commentaires
Application à l'étude des variations d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. À ce stade, un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. La dérivée de la réciproque est obtenue géométriquement à l'aide de la symétrie des tangentes. La formule sera démontrée ultérieurement.

c) Étude d'une fonction

Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction. Déterminer les variations et les limites d'une fonction. Déterminer les extremums éventuels d'une fonction. Tracer le graphe d'une fonction. Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.

d) Fonctions usuelles

Valeur absolue.	Représenter graphiquement la fonction.
Partie entière.	Représenter graphiquement la fonction. Notation $\lfloor x \rfloor$. L'existence est admise. Toute technicité dans les calculs se rapportant à $\lfloor x \rfloor$ est exclue.
Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle.	Comparer des fonctions au voisinage de l'infini.
	Les fonctions hyperboliques directes ch, sh et th peuvent faire l'objet d'exercices, mais aucune connaissance sur ces fonctions n'est exigible.

Équations différentielles linéaires

Les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, du premier et du second ordre. Il s'agit dans cette section de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur. Cette section doit être traité en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions, à valeurs réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée. Utiliser le principe de superposition ou la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Décrire l'ensemble des solutions. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que x et y.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. La démonstration est hors programme.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Donner l'équation caractéristique. Résoudre l'équation homogène, notamment dans le cas d'une équation de la forme $y'' \pm \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale. Utiliser le principe de superposition. Exprimer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. La démonstration est hors programme.

Systèmes linéaires

Il s'agit d'introduire des notions nouvelles pour les étudiants. L'objectif est double :

- *maîtriser la théorie des systèmes linéaires du point de vue de la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques ;*
- *préparer l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite.*

Les résultats, présentés dans le cadre des systèmes à coefficients réels, sont étendus sans difficulté au cas des systèmes à coefficients complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Systèmes linéaires	
Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues.	Reconnaître qu'un système donné est un système linéaire. Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$.
Système homogène.	Système homogène associé à un système quelconque.
Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée $(A\|B)$ où B est la colonne des seconds membres.	Calculer le produit d'une matrice par une colonne. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de $\lambda \cdot L_j$ à L_i pour $i \neq j$.	Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow \lambda L_i$; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	Maîtriser la notion de système équivalent.
Deux matrices sont dites équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Relier cette notion à la théorie des systèmes linéaires. Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.
Si on passe d'un système $\mathscr{S}$ à un autre système $\mathscr{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathscr{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathscr{S}$.	Cela justifie la présentation matricielle d'un système linéaire.
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan	
Matrice échelonnée en ligne.	Reconnaître et exploiter des matrices échelonnées dans le cadre de l'étude de systèmes linéaires. Un schéma « en escalier » illustre la notion de matrice échelonnée. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
c) Résolution d'un système linéaire	
Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).	Faire le lien entre nombre d'équations, nombre d'inconnues et nombre de pivots.
Rang d'un système linéaire.	Le rang est ici défini comme égal au nombre de pivots. On admettra la cohérence de cette définition.

Contenus	Capacités & Commentaires
	Déterminer si un système linéaire possède ou non des solutions.

Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels ou complexes ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Polynômes à une indéterminée	
Définition d'un polynôme comme fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Aucune connaissance de la construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est exigible. Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ou $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
Opérations : somme, produit et composée.	
Degré d'un polynôme. Coefficient dominant. Degré d'une somme et d'un produit.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples.	
Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.	Effectuer une division euclidienne de polynômes.
c) Racines	
Racine (ou zéro) d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité. Factoriser par $(X-a)$ lorsque a est racine.
Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a.	Démonstration non exigible. Factoriser par $(X-a)^{\alpha}$ lorsque a est racine d'ordre de multiplicité α.
Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré. Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	
d) Décomposition en facteurs irréductibles	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles. Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration de ce théorème est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2.	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme de degré 2 en fonction de ses coefficients.	Aucune connaissance sur la somme et le produit des racines d'un polynôme de degré strictement supérieur à 2 n'est exigible.
f) Fractions rationnelles	
Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; détermination de la partie polaire de R relative à un pôle a.	Calcul de la partie polaire en un pôle simple. Aucune connaissance n'est exigible dans le cas de pôles d'ordre supérieur. La démonstration de l'existence et de l'unicité de la partie polaire est hors programme.
Exemples de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle à coefficients réels, lorsque les pôles complexes sont d'ordre 1 ou 2.	L'objectif est la mise en pratique sur des cas simples.

Calcul matriciel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrices : opérations et propriétés	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).	Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.	
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.	Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit de deux matrices.	Interpréter la j-ème colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ème colonne de B. Interpréter la i-ème ligne du produit AB comme le produit de la i-ème ligne de A par B.
Formule du binôme.	Calculer les puissances de certaines matrices carrées.
b) Matrice inversible	
Matrice carrée inversible. Inverse. On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n.	Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes. Caractériser l'inversibilité par le nombre de pivots. Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse. On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement. Toute théorie générale des groupes est exclue. La notion de comatrice est hors programme.
Inverse du produit de matrices inversibles.	

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique des sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans la sous-section « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

La deuxième sous-section « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels à la sous-section « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :
- *traiter cette section selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques développées dans les sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel » ;*
- *mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces et sous-espaces vectoriels	
Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$ pour Ω non vide (cas particulier des suites) et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.	Identifier un ensemble comme un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.	
L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.	Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.	Brève extension au cas d'une somme finie de sous-espaces vectoriels.

Contenus	Capacités & Commentaires
La somme $F+G$ est dite directe si l'écriture de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Sous-espaces supplémentaires.	Exploiter une relation $F\cap G=\{0\}$ pour démontrer que F et G sont en somme directe. Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné dans une somme directe. La notion de somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels est au programme en vue de la réduction. Elle peut être introduite, sans aucune technicité, ici ou dans la section sur la réduction.

b) Familles finies de vecteurs

Vecteurs colinéaires. Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée.
Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés deux à deux distincts est libre.	
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.
Bases. Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.
Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$ sont en somme directe.	

B - Espaces vectoriels de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires

a) Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.	Exhiber une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie. Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si E est de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.	On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	
Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.
Supplémentaires d'un sous-espace. Existence, dimension commune.	Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par l'intersection nulle et la somme des dimensions.
Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	Cas d'une somme directe.
c) Famille finie de vecteurs	
Rang d'une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Majorer le rang d'une famille de vecteurs en exhibant une relation linéaire. Le minorer en exhibant une sous-famille libre. Utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice. Notation $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.
Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs. Famille libre, famille liée.	Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée.
Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre ; (ii) le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale ; (iii) le nombre de pivots est égal à p.	L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.
Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$; (ii) pour toute matrice colonne B à n lignes, le système $AX = B$ est compatible ; (iii) le nombre de pivots est égal à n.	Déterminer un système d'équations linéaires de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Donner une interprétation géométrique dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.

C - Applications linéaires et représentations matricielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes.	Notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$.
Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées.	
Règles de calcul.	
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Notation $\mathrm{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.
Image directe d'un sous-espace vectoriel.	
Image et noyau. L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau, la surjectivité à l'aide de l'image. Notations $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$.
b) Isomorphismes	
Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (toute) base de E en une base de F.	
Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.	Cas particulier des endomorphismes. Contre-exemples en dimension infinie.
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.	
Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	
d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Identité, homothéties.	Notation Id_E.
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.	
e) Rang d'une application linéaire	
Rang d'une application linéaire.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	La démonstration est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Représentation matricielle en dimension finie	
Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Passer du registre vectoriel au registre matriciel pour exprimer les coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Déterminer la matrice, dans une base adaptée, d'un projecteur et d'une symétrie. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B}=\mathscr{C}$.
Un couple de bases étant fixé, isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, après un changement de base(s). Choisir une base adaptée à un problème donné.
g) Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice	
On peut identifier les éléments de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ avec des matrices colonnes.	
Application $X \mapsto AX$. Linéarité.	Passer d'une écriture du type $(x,y)\mapsto(ax+by,cx+dy)$ à une écriture matricielle et réciproquement.
L'image AX est combinaison linéaire des colonnes de A. Image et noyau d'une matrice.	Déterminer des équations de l'image et du noyau de A. On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.
h) Rang d'une matrice	
Rang d'une matrice A, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Faire le lien entre divers aspects de la notion de rang (rang d'une matrice, d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs, d'un système linéaire). Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot. Pour le calcul à la main, on se limite à des cas simples.
Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.	
i) Trace et transposée d'une matrice	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité. $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	Notation $A^\top$. Matrice symétrique, antisymétrique.

Déterminants

Cette section développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que : (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; (iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2,3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	
Déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	Démonstration hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Démonstration hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des endomorphismes bijectifs.	La formule de changement de bases pour un déterminant est hors programme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Réduction des endomorphismes

Cette section étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres et polynôme caractéristique	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme. Spectre.	Interprétation en termes de droite stable. Notation Sp.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.	
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres d'une matrice.	Extension des définitions et de ces résultats aux matrices.
b) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.	
Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Extension des résultats précédents au cas des matrices.
c) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Démonstration hors programme. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.
En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.	
Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres.	Extension des résultats aux matrices.
d) Applications de la réduction	
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Résolution de systèmes récurrents linéaires homogènes.	Toutes les indications doivent être données pour traduire une récurrence scalaire en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$.

Espaces euclidiens

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- *introduire les notions fondamentales liées à la structure euclidienne de* $\mathbb{R}^n$ *;*
- *étudier les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

Dans cette section, seules les connaissances liées à la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ peuvent faire l'objet d'une évaluation.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire et norme	
Produit scalaire. Espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. On pourra donner des exemples de produits scalaires définis par une intégrale sur des espaces de fonctions et de polynômes mais aucune connaissance sur des espaces euclidiens autres que $\mathbb{R}^n$ n'est exigible.
Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$. Norme associée à un produit scalaire, distance associée. Bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.	
b) Isométries vectorielles de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et matrices orthogonales	
Un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Matrice orthogonale : définition par l'égalité $A^\top A = I_n$.	
Caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes.	Démonstration non exigible.
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ est orthogonale.	Démonstration non exigible.
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.	Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormale directe.
c) Classification en dimensions 2 et 3	
Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3.	Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries. Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.
d) Matrices symétriques réelles	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$.	Démonstration hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

Nombres réels et suites numériques réelles

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels). Les notions de borne supérieure et inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Droite réelle.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
La relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, maximum, minorant, minimum.	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	Déterminer les bornes supérieure et inférieure éventuelles de fonctions. Aucun développement ni aucune technicité ne sont attendus.
Approximations décimales d'un nombre réel.	Déterminer les valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. La notion de suite extraite n'est pas exigible.
Opérations. Monotonie, stricte monotonie.	
Suites minorées, majorées, bornées.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)$ est majorée.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	Les suites arithmético-géométriques ne font pas l'objet d'un cours.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Prouver l'existence d'une limite ℓ en majorant $\lvert u_n - \ell\rvert$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\lvert u_{n+1} - \ell\rvert \leqslant k\lvert u_n - \ell\rvert$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notation $u_n \to \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée.	
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques. Passage à la limite dans une inégalité.	
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorèmes de convergence par encadrement.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.
Théorème de la limite monotone.	Exploiter ce théorème sur des exemples. La démonstration de ce théorème est hors programme.
Théorème des suites adjacentes.	Il convient d'insister sur l'intérêt algorithmique de cette notion : résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$ et approximations décimales d'un nombre réel.
	Les suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ sont à étudier sous forme d'exercices guidés, toutes les indications utiles pour déterminer leurs propriétés doivent être données.

e) Comparaisons de suites

Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n)$, n^α, $e^{\gamma n}$ et $n!$.	Traduire les croissances comparées à l'aide de o.
Liens entre les différentes relations de comparaison.	Si $u_n = o(v_n)$ alors $v_n + u_n \sim v_n$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Limites, continuité et dérivabilité

Cette section est divisée en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans la première section d'analyse.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$

Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.	
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a.	Exploiter ces résultats sur des exemples. Adaptation des énoncés relatifs aux suites.
Image d'une suite de limite ℓ par une fonction admettant une limite en ℓ.	

b) Comparaison des fonctions

Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions.	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
Relations de négligeabilité et d'équivalence.	Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.

c) Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à droite et à gauche.	
Prolongement par continuité en un point.	Pour a n'appartenant pas à I, la fonction f a une limite finie en a si et seulement si elle se prolonge par continuité en a.
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples.

d) Continuité sur un intervalle

Définition. Opérations. Ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.	
Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	En liaison avec le programme d'informatique, appliquer le procédé de dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue. La démonstration n'est pas exigible.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Continuité et bijectivité	
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$; sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (de même monotonie que la fonction f).	Appliquer ce résultat sur des exemples. Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. La démonstration est hors programme.

B - Dérivabilité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité de f en a, nombre dérivé. Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1. Dérivabilité à droite et à gauche en a. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition. Notation $f'(a)$. La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique.
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, fg et, si $g(a) \neq 0$, de $\dfrac{f}{g}$. Dérivabilité et dérivée en a de $g \circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$. Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle J et si f est dérivable en a, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée en ce point. Extension des résultats précédents aux fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, propriétés de la réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$.	
c) Propriétés des fonctions dérivables	
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Égalité des accroissements finis.	Interpréter ce résultat de manière géométrique et cinématique. Démonstration non exigible.
Inégalité des accroissements finis : si une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifie pour tout t de $]a,b[$, $\lvert f'(t)\rvert \leqslant M$, alors, pour tous x, y de $[a,b]$, on a $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leqslant M\lvert x-y\rvert$.	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables.	Appliquer ces résultats sur des exemples.

d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I, où k appartient à $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.	Ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$.
Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Intégration sur un segment

L'objectif de cette section est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée les années précédentes. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Le cas des fonctions à valeurs réelles est étendu sans difficulté au cas complexe.

a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. En liaison avec le programme d'informatique, calculer des valeurs approchées d'intégrales par les méthodes des rectangles et des trapèzes.
Valeur moyenne. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	
Inégalité $\displaystyle\left\lvert\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$.
Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ (où $a<b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.	

b) Calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$	
Intégration par parties. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Lorsqu'un changement de variable est nécessaire, le changement à effectuer est indiqué.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles.

Intégration d’une fonction continue sur un intervalle

L’objectif de cette section est d’étendre la notion d’intégrale à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées
L’étude de la semi-convergence des intégrales n’est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d’une fonction continue sur un intervalle	
Pour $f : [a,b[\to \mathbb{K}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l’intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.	
Théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles, continues et de signe constant sur $[a,b[$, sous l’hypothèse $f \leqslant g$ ou $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{\sim} g(t)$.	Il suffit de vérifier l’hypothèse $f \leqslant g$ au voisinage de b.
Adaptation aux fonctions définies sur un intervalle $]a,b]$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a,b[$.	
Intégrales de référence : $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\ \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\ \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t.$$	
Relation de Chasles.	
Linéarité, positivité, croissance de l’intégrale.	
Inégalité : si $a < b$, $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.	
Une fonction continue sur l’intervalle $]a,b[$ est identiquement nulle sur $]a,b[$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t = 0$.	
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction φ strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha,\beta[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ avec $a = \lim\limits_{u\to\alpha}\varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{u\to\beta}\varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Lorsqu’un changement de variable est nécessaire, le changement à effectuer est indiqué.
b) Intégrale absolument convergente	
On dit qu’une fonction f continue par morceaux sur I a une intégrale absolument convergente si l’intégrale de la fonction $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ est convergente.	L’étude de la semi-convergence n’est pas au programme.
Une intégrale absolument convergente est convergente.	Résultat admis.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme ; il relève des outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a.	Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Unicité, troncature.	Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.
Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$, où a_p est le premier coefficient non nul d'un développement limité de f au voisinage de a.	Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	
Composition, application au quotient.	Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	Démonstration non exigible Aucune autre formule dite de Taylor n'est exigible. Calculer le développement limité d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ à partir de ses dérivées successives.
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de calculs de développements limités simples. Exploiter des outils logiciels pour des développements limités plus complexes. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, ainsi que celui de tan à l'ordre 3.
b) Applications des développements limités	
Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure.	
Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.
Étude locale d'une fonction.	Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales. Aucun résultat général n'est exigible.

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Cette section fournit l'occasion de revoir une partie des notions d'analyse abordées auparavant. L'étude des fonctions vectorielles en dimension inférieure ou égale à trois permet de présenter des résultats utiles dans les autres disciplines scientifiques et introduit le paragraphe sur les courbes paramétrées. Dans ce cadre, le but est de tracer des courbes sans support logiciel quand les calculs se prêtent à un tracé rapide. Pour des calculs dont la gestion relève d'une technicité excessive, on utilise un outil informatique qui permet en plus de mettre en évidence des problèmes d'échelle et de restriction d'intervalle. L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	
Continuité et dérivabilité (éventuellement à gauche ou à droite) en un point ou sur un intervalle.	Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées. Les étudiants doivent savoir interpréter géométriquement et cinématiquement la notion de dérivée en un point.
Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles.	
b) Courbes paramétrées	
Rappels sur les graphes de fonctions réelles d'une variable réelle, tangente à un tel graphe.	
Courbe paramétrée. Tangente en un point.	La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.
Droites asymptotes à une courbe	Hormis les cas d'asymptotes verticales et horizontales, l'étude du comportement asymptotique d'une courbe paramétrée est hors programme
Exemples de constructions d'arcs plans.	Les étudiants doivent savoir exploiter les propriétés des fonctions (parité, périodicité) afin de restreindre l'ensemble d'étude.
Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.
Cas particulier d'un point régulier.	Interprétation cinématique.
Longueur d'un arc paramétré régulier de classe $\mathscr{C}^1$.	La formule n'est pas exigible. L'abscisse curviligne est hors programme.

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique et de mieux appréhender la notion de nombre réel à travers celle de développement décimal. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série à termes réels ou complexes; sommes partielles; convergence ou divergence; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Les étudiants doivent savoir prouver qu'une série diverge grossièrement en étudiant la limite du terme général.
Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence.	
Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$, et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$	
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	
Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.	Toute autre règle de comparaison est hors programme.
Théorème de comparaison séries-intégrales : si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.
Séries de Riemann.	Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible. La notion de semi-convergence est hors programme.
Inégalité triangulaire $\left\lvert\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\rvert \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n\rvert$.	
d) Séries alternées	
Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro.	

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T-périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette section développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. Cette section est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions définies par morceaux	
Une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.	
Une fonction T-périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période.	Interprétation graphique.
Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, T-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur une période d'une fonction T-périodique et continue par morceaux.	Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.
b) Coefficients et séries de Fourier	
Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f.	Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k. Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.
Cas des fonctions paires, impaires.	
Sommes partielles de Fourier d'une fonction f définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$	
Série de Fourier : $$a_0 + \sum \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$	En cas de convergence, notation $S(f)(t)$ pour la somme de la série de Fourier de f : $$S(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$
c) Théorèmes de convergence	
Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les séries $\sum a_k^2$ et $\sum b_k^2$ convergent et : $$\frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t)\right)^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de Dirichlet : Si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et $$S(f)(t) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{u\to t^+} f(u) + \lim_{u\to t^-} f(u)\Big).$$ Si de plus f est continue, alors $$S(f)(t) = f(t).$$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir appliquer ces résultats pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Équations différentielles

L'accent est mis sur les techniques de résolution des équations scalaires d'ordre 2 et des systèmes linéaires à coefficients constants, en raison de leur importance dans d'autres champs disciplinaires.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équations différentielles scalaires d'ordre 2	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.	
Équation avec second membre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Principe de superposition.	Les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une solution de l'équation homogène.
Résolution dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.	On donnera toute indication utile. Recherche de solutions particulières, on évitera toute technicité excessive.
b) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	
Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille $n \times n$ à coefficients constants.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Démonstration hors programme.
Structure de l'ensemble des solutions.	Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.	
Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.	Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2.

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude des fonctions de plusieurs variables se veut résolument pratique : introduction à la continuité et aux dérivées partielles, application à la recherche d'extremums.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$)	
Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Boules. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$.	Les normes non euclidiennes sont hors programme.
b) Continuité	
Continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations.	L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
c) Dérivées partielles, applications de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 1.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. La notion de différentielle en un point est hors programme.
Gradient.	Notations $\overrightarrow{\nabla} f$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f$.
Point critique.	
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Opérations.	
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Existence admise.
Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.	
Dérivées partielles de $(u,v) \mapsto h(f(u,v), g(u,v))$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Opérations.	
Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.
Développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.	La démonstration de cette formule est hors programme.
d) Extremums d'une fonction de deux variables	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, étude de l'existence d'un extremum local en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.	Démonstration non exigible. On donnera l'interprétation géométrique de cette étude et on visualisera les surfaces à l'aide d'un logiciel.